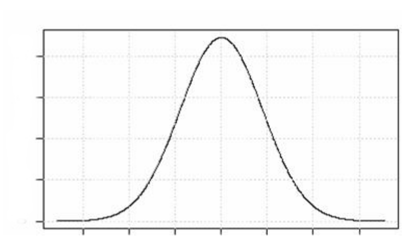
LA DISTRIBUZIONE NORMALE

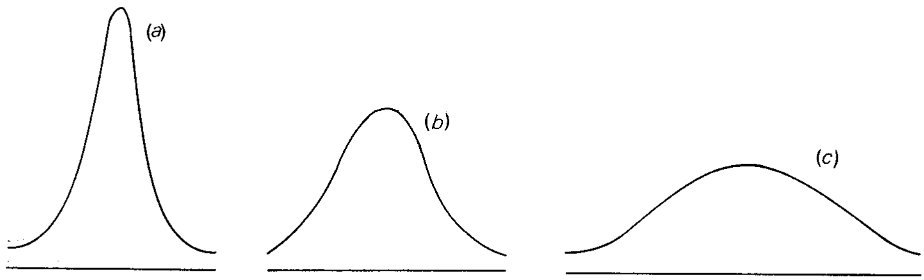
LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- La Distribuzione **Normale** o **Gaussiana** è la distribuzione più importante ed utilizzata in tutta la statistica



- La curva delle frequenze della distribuzione Normale ha una forma caratteristica, simile ad una campana
- Il valore medio si trova esattamente al centro della distribuzione, e la curva è simmetrica rispetto ad esso: quindi valor medio, mediana e moda coincidono
- La maggior parte delle osservazioni si concentrano intorno al valore medio
- Allontanandosi dal valore medio, la curva si avvicina sempre più all'asse delle ascisse ma non giunge mai a toccarlo: quindi si possono avere anche (pochissime) osservazioni che risultano molto distanti dalla media

LA DISTRIBUZIONE NORMALE



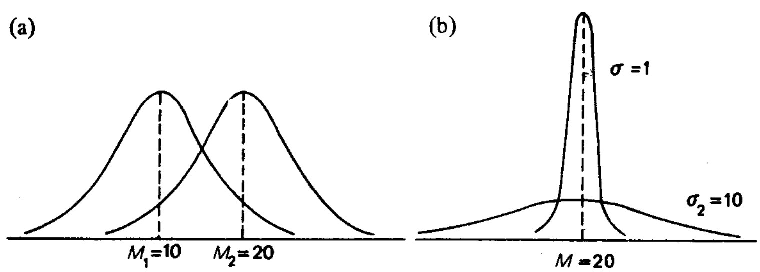
- La Forma della Distribuzione Normale
- La distribuzione Normale non descrive in realtà una sola distribuzione, ma piuttosto una *famiglia* di distribuzioni, tutte con la stessa forma a campana, ma caratterizzate da media e varianza diverse
- Tutte le curve normali hanno cioè la stessa forma caratteristica, ma possono essere più strette e appuntite, oppure più larghe e piatte

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- **La funzione matematica della Distribuzione Normale**
- Una curva normale è definita in maniera univoca da due soli parametri: il valore medio e lo scarto quadratico medio della distribuzione stessa

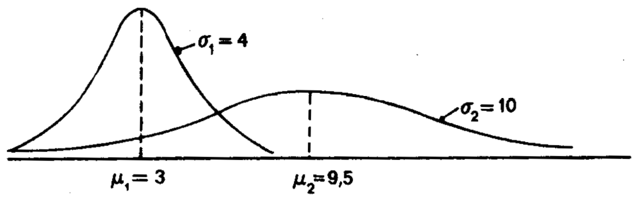
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

- La funzione f(x) descrive, al variare dei valori assunti dai due parametri, una *famiglia* di curve normali :
  - se si varia μ : si sposta orizzontalmente l'asse di simmetria della curva
  - se si varia σ : la curva si allarga e appiattisce al crescere del valore di σ



LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Variando contemporaneamente μ e σ : la curva trasla orizzontalmente e contemporaneamente si fa più o meno appuntita



- Una distribuzione Normale con media μ e scarto quadratico σ viene indicata semplicemente come: $N(\mu , \sigma)$
- Per indicare che la variabile X si distribuisce come una Normale si scrive:

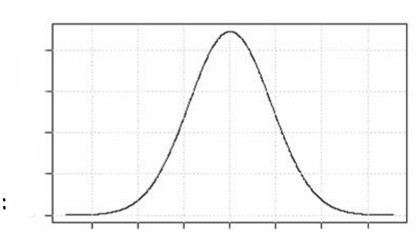
$$x \sim N(\mu, \sigma)$$

Prof. Claudio Capiluppi - Facoltà di Scienze della Formazione - A.A. 2007/08

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- **Proprietà della Distribuzione Normale**
- Tutte le proprietà della normale si possono derivare dallo studio della sua funzione analitica:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- E' simmetrica rispetto all'asse $x = \mu$ infatti:

$$(x-\mu)^2 = [-(x-\mu)]^2 = (\mu - x)^2$$

- Ha un massimo relativo (e assoluto) in corrispondenza del punto $x = \mu$ e vale:

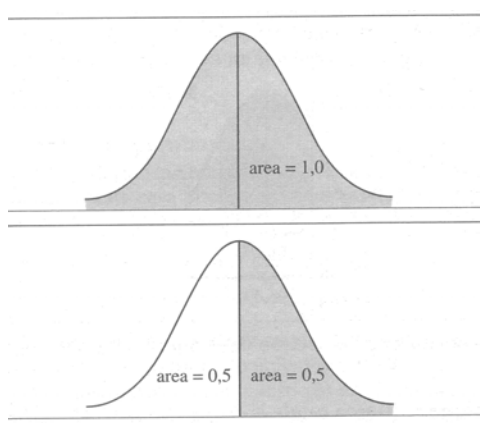
$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \frac{1}{\sigma}\, 0{,}3989$$

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- **Importanza della Distribuzione Normale**
- Molte distribuzioni che si incontrano nel mondo reale sono effettivamente di tipo normale, ovvero sono molto ben approssimate da una Normale: la Normale è un *modello* che descrive adeguatamente la distribuzione di numerosi fenomeni
- Molte distribuzioni, di per sé anche lontane come forma dalla Normale, magari anche asimmetriche (purché unimodali), sono *normalizzabili* mediante una *trasformazione* di variabile (es. w = log(x))
- In generale si distribuiscono *normalmente* quei caratteri o fenomeni che sono il risultato di un gran numero di piccoli fattori, tra loro *indipendenti* (es. variabili biometriche, prodotto di serie, processo di misura, ...)
- I valori prodotti da un processo di misura sono generalmente distribuiti normalmente: misurando ripetutamente lo stesso oggetto, lo strumento non produce sempre lo stesso valore, a causa del cosiddetto *errore di misura*, risultato della somma di un gran numero di piccoli fattori indipendenti che influenzano il processo
- La somma (e la media) di n variabili indipendenti *tende* a distribuirsi normalmente, al crescere di n, quali che siano le distribuzioni di partenza (teorema del limite centrale):
  - è sufficiente che le distribuzioni di partenza siano simmetriche e unimodali, e la *convergenza* della distribuzione della media alla normale è molto rapida
  - se invece le distribuzioni sono molto asimmetriche la convergenza è più lenta, (cioè si verifica solo sommando un gran numero n di variabili indipendenti)

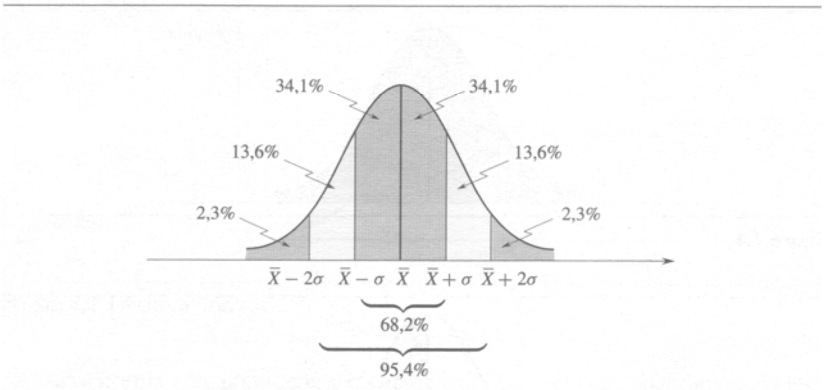
LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Quando una curva descrive una distribuzione di frequenze relative, l'*area* totale sottesa alla curva è pari a 1 (la somma delle frequenze relative).
- Dunque anche l'area sottesa alla distribuzione Normale è pari ad 1: allora per la simmetria della curva, l'area a sinistra della media è pari a $\frac{1}{2}$, come pure l'area alla sua destra
- Questo non ci stupisce, perché è proprio la definizione di mediana, e abbiamo già visto che nella N. la media coincide con la mediana.
- Vi sono altre aree molto importanti nella N. che possono essere descritte in termini di scarti quadratici medi di distanza dalla media



LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Aree importanti sottese alla curva Normale, individuate in termini di scarti quadratici medi di distanza dalla media:



  - lo 0,6826 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-\sigma)$ e $(\bar{x}+\sigma)$
  - lo 0,9544 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-2\sigma)$ e $(\bar{x}+2\sigma)$
  - lo 0,9973 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-3\sigma)$ e $(\bar{x}+3\sigma)$

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

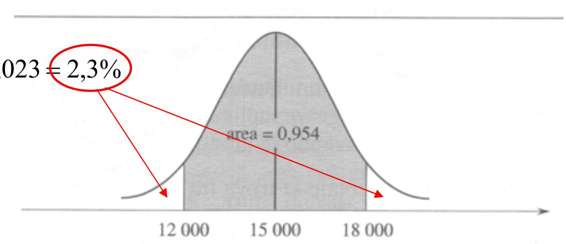
- Esempio: Supponiamo di sapere che il reddito delle famiglie degli studenti dell'Università di Verona si distribuiscano normalmente con M=15000 EUR e SQM=1500 EUR. Domande:
  - Quante famiglie guadagnano più di 18000 EUR ?
  - Se l'ESU vuole assegnare una borsa di studio al 2,3% degli studenti meno abbienti, che soglia di reddito massimo deve fissare ?

  Osserviamo che :

$$\bar{x}+2\sigma = 15000+3000 = 18000$$
$$\bar{x}-2\sigma = 15000-3000 = 12000$$

  L'area esterna all'intervallo [12.000, 18.000] contiene il 4,6% circa dei casi:

$$\frac{(1-0{,}954)}{2} = \frac{0{,}046}{2} = 0{,}023 = 2{,}3\%$$



LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- La distribuzione **Normale Standardizzata**
- La distribuzione Normale è scomoda da usare per calcolare le aree di interesse, quando i valori critici non sono multipli esatti di sigma, perché dipende da due parametri (μ e σ)
- Per questo si introduce la **Normale Standard**, ottenuta *standardizzando* la variabile Normale.
- Data una variabile X, Normale con media μ e scarto quadratico σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

la trasformazione $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ avrà media 0 e scarto quadratico medio uguale a 1.

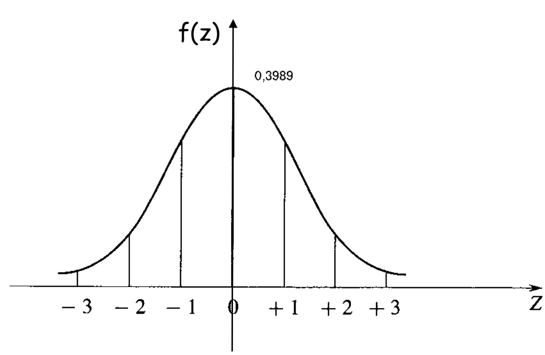
- La funzione f(z) risultante dalla trasformazione non dipende più da alcun parametro:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- Questa distribuzione viene chiamata Normale Standard e indicata come: **N(0,1)**

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- La funzione Normale Standard ha la stessa forma della Normale completa, ma non contenendo nessun parametro, descrive una unica e ben determinata curva
- Valgono naturalmente tutte le proprietà viste per la Normale, con gli opportuni adattamenti per tenere conto del fatto che la media è 0 e la varianza è 1, quindi:
  - la curva è centrata e simmetrica rispetto all'origine degli assi: z = 0
  - il massimo delle frequenze si ha per z = 0 e vale f(0) = 0,3989
  - le aree di interesse viste in precedenza diventano più semplicemente:



LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- **Le Tavole della distribuzione Normale Standardizzata**
- La funzione f(z) non dipende da alcun parametro, quindi può essere facilmente tabulata
- E' cioè possibile costruire una tavola che riporta le aree sottese alla curva in corrispondenza di diversi valori di z
- In questa tavola viene riportata l'area compresa tra 0 e un punto z collocato a destra dell'origine
- Esempio:
  L'area sottesa dalla N(0, 1) nell'intervallo [0, 1.24] è pari a: 0,3925

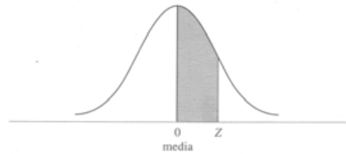
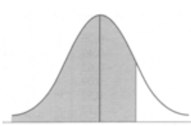


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

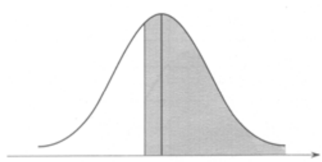
- La tavola della Normale Standard può essere anche realizzata in altri formati, oltre a quello appena visto
- L'altro formato più utilizzato è quello che riporta la **Funzione di ripartizione F(z)** (frequenze cumulate), cioè l'intera area a sinistra di un dato valore z
- Questa tavola è naturalmente del tutto equivalente alla precedente, che forniva in pratica:
  F(z) – F(0) = F(z) – 0,5
- Nei problemi di calcolo con la N conviene sempre per prima cosa **disegnare l'area** che ci interessa calcolare.
- Poi andremo a determinare il modo più conveniente di procedere, a seconda della tavola che abbiamo a disposizione



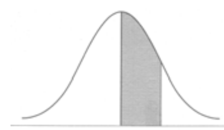
z →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.00	50000	50040	50080	50120	50160	50199	50239	50279	50319	50359
0.01	50399	50439	50479	50519	50559	50598	50638	50678	50718	50758
0.02	50798	50838	50878	50917	50957	50997	51037	51077	51117	51157
0.03	51197	51237	51276	51316	51356	51396	51436	51476	51516	51555
0.04	51595	51635	51675	51715	51755	51795	51834	51874	51914	51954
0.05	51994	52034	52074	52113	52153	52193	52233	52273	52313	52352
0.06	52392	52432	52472	52512	52551	52591	52631	52671	52711	52751
0.07	52790	52830	52870	52910	52949	52989	53029	53069	53109	53148
0.08	53188	53228	53268	53307	53347	53387	53427	53466	53506	53546
0.09	53586	53625	53665	53705	53745	53784	53824	53864	53903	53943
0.10	53983	54022	54062	54102	54142	54181	54221	54261	54300	54340
0.11	54380	54419	54459	54498	54538	54578	54617	54657	54697	54736
0.12	54776	54815	54855	54895	54934	54974	55013	55053	55093	55132
0.13	55172	55211	55251	55290	55330	55369	55409	55448	55488	55527
0.14	55567	55607	55646	55685	55725	55764	55804	55843	55883	55922
0.15	55962	56001	56041	56080	56120	56159	56198	56238	56277	56317
0.16	56356	56395	56435	56474	56513	56553	56592	56631	56671	56710
0.17	56749	56789	56828	56867	56907	56946	56985	57025	57064	57103
0.18	57142	57182	57221	57260	57299	57339	57378	57417	57456	57495
0.19	57535	57574	57613	57652	57691	57730	57769	57809	57848	57887
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	**74857**	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	**79955**	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84849	**85083**	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	**89973**	90147
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	**94950**	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	**97500**	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Esempio: La velocità delle auto rilevata dall'autovelox sulla tangenziale est si distribuisce normalmente con M=75 km/h e SQM=8 km/h.
  - Che percentuale di auto superano il limite di velocità di 70 km/h ?
  - A quanti automobilisti su 100 viene ritirata la patente (oltre 90 km/h) ?



- Per prima cosa disegniamo le aree che rispondono alle domande che ci vengono poste
- Supponiamo di avere a disposizione la tavola della Normale che riporta l'area compresa nell'intervallo [0, z], e pensiamo a come conviene procedere



- Per rispondere alla prima domanda, considerato che l'area a destra della media è ben nota (= 0,5), dobbiamo solo calcolare l'area compresa tra 70 e 75

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Il primo passo è calcolare il valore z standardizzato corrispondente a 70 km/h:
  $z = (70 - 75) / 8 = -0.625$
- Osserviamo che l'area compresa nell'intervallo [-0.625 , 0], per la simmetria della Normale, è uguale a quella dell'intervallo [0 , 0.625]
- Cerchiamo 0.625 sulla tavola: vediamo che non troviamo il valore esatto, dobbiamo quindi interpolare i due valori più prossimi: $(0.2324 + 0.2357) / 2 = 0.2341$
- A questo punto dobbiamo solo ricordarci di aggiungere l'area a destra del valore medio: $0.2341 + 0.5 = 0.7341$
- Arriviamo quindi alla conclusione che il 73,41% degli autoveicoli in transito superano il limite di velocità.

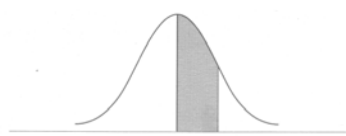
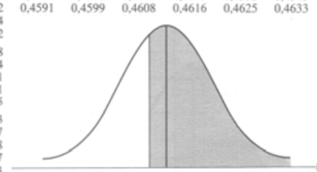


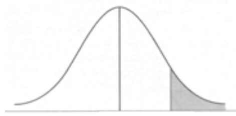
Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664						
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732						
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788						
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834						
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871						
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901						
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925						
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943						
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957						
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968						
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977						
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983						
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988						



LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo calcolare l'area a destra di 90 km/h



- Dunque calcoliamo il valore z standardizzato corrispondente a 90 km/h: z = (90 – 75) / 8 = 1.88
- Osserviamo che l'area a destra di z=1.88 è uguale a 0,5 meno l'area dell'intervallo [0, 1.88], fornita dalla nostra tavola
- Cerchiamo 1,88 sulla tavola e troviamo l'area: 0.4699
- L'area che ci interessa è quindi uguale a: 0.5 – 0.4699 = 0.0301
- Posiamo quindi concludere che viene ritirata la patente al 3% degli automobilisti in transito

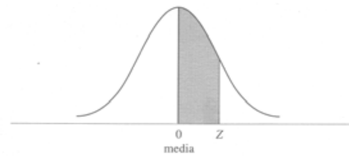


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Prof. Claudio Capiluppi - Facoltà di Scienze della Formazione - A.A. 2007/08

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Esempio di problema inverso: Trovare l'intervallo intorno alla media che contiene il 95% dei casi
- Dobbiamo determinare il valore z a cui corrisponde un intervallo [-z, +z] contenente il 95% delle frequenze.
- Per la simmetria della normale, equivale a trovare sulla tavola l'intervallo [0, z] contenente il 95/2 = 47.5% delle frequenze
- Dobbiamo cercare nella tavola un valore dell'area pari a 0.475: in questo caso siamo fortunati, infatti corrisponde esattamente a z = 1.96
- Questo intervallo [-1.96, 1.96] contenente il 95% dei casi, è molto utilizzato in statistica (campionamento, verifica ipotesi)

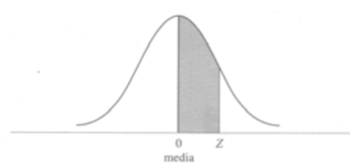


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Esempio. Torniamo sul problema dell'ESU, dove il reddito delle famiglie degli studenti si distribuiva normalmente con M=15000 EUR e SQM=1500 EUR.
- Supponiamo che l'ESU abbia avuto più fondi del previsto e possa assegnare una borsa di studio al 5% degli studenti con minore reddito. Determiniamo la nuova soglia di reddito massimo da fissare.

- Per prima cosa osserviamo che per la simmetria della Normale l'area a sinistra del valore effettivamente da determinare (-z) è uguale a quella a destra del punto simmetrico (+z)
- Quindi sulla nostra solita tavola che riporta l'area compresa nell'intervallo [0, z], cerchiamo il valore z a cui corrisponde un'area di: 0.50 – 0.05 = 0.45
  - se non troviamo un'area esattamente pari a 0.45, individuiamo i due valori z più vicini per difetto e per eccesso al valore cercato
  - quindi otteniamo il punto z cercato per interpolazione tra i due valori più vicini

LA DISTRIBUZIONE NORMALE

- Lo z cercato si colloca tra:
  1,64 (area=0,4495) e
  1,65 (area=0,4505)
  Per interpolazione determiniamo:
  z = 1,645
- A questo punto dobbiamo ricordarci che il punto z cercato era in realtà quello simmetrico, a sinistra dell'origine, e quindi negativo: z = -1,645
- Infine dobbiamo riportare il risultato ottenuto da punto z in Euro:

  $$\textit{dato che:} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

  $$\textit{si risale a:} \quad x = z\sigma + \mu$$

- La soglia di reddito per avere la borsa è allora:

  x = -1,645 * 1500 + 15000 =

  = 12532,5 EUR

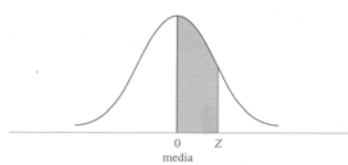


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990