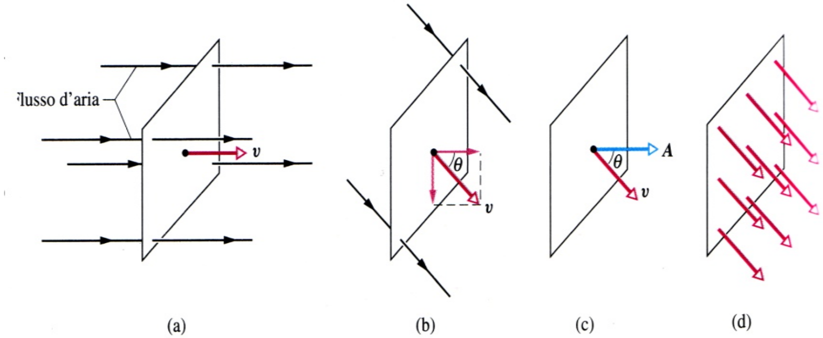
Definizione di Flusso



Il flusso è la quantità di materia che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo. Se si parla di campo elettrico uniforme basterà dire linee di campo per unità di superficie

- Il flusso aumenta se il campo elettrico aumenta
- Il flusso attraverso una superficie perpendicolare al campo è massimo
- Il flusso attraverso una superficie parallela al campo è zero

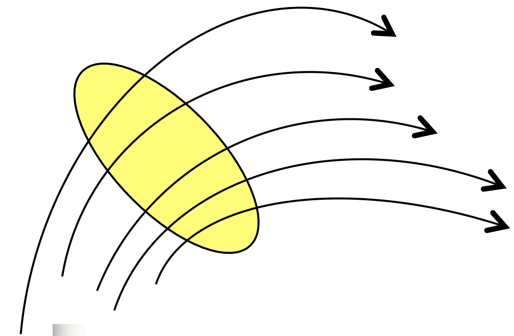
L' algoritmo che soddisfa queste condizioni è il prodotto scalare fra il vettore campo elettrico <u>*E*</u> e un vettore <u>*ΔA*</u> normale alla superficie

$$\Delta\phi_E = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = E\Delta A\cos\theta$$

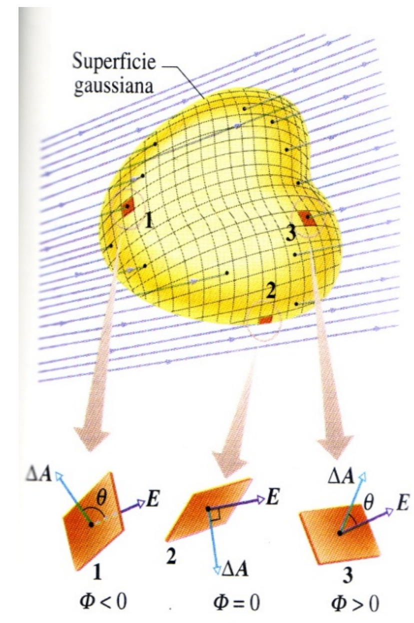
Flusso di un campo

Il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo, a meno che all' interno della superficie non vi sia una sorgente o un pozzo di campo:
Infatti il prodotto scalare misura la densità delle linee di campo attraverso una superficie

$$\Delta\Phi_E = E\,\Delta A\,\cos\theta$$



Può quindi verificarsi che le linee si addensino o si diradino, in questo caso la superficie investita sarà maggiore o minore, ma la densità di campo è la stessa. Si deve prestare attenzione alla direzione delle linee del campo che incidono sulla superficie chiusa.

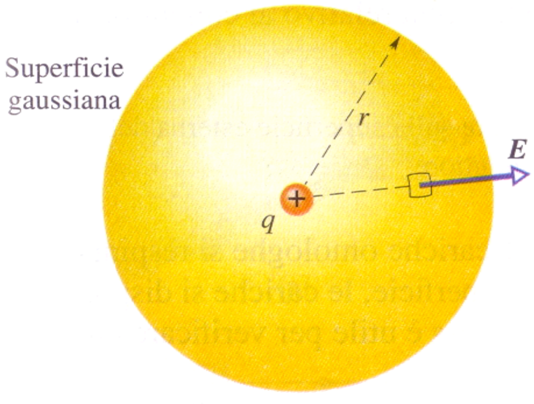


Per le linee entranti il flusso è negativo mentre per le linee uscenti il flusso è positivo; il risultato netto è 0.

Teorema di Gauss

"Il flusso Φ_E di campo elettrico che attraversa una <u>qualunque</u> superficie chiusa è proporzionale alla carica in essa racchiusa".

$$\int d\Phi_E = Q/\varepsilon_0$$



Caso di una carica puntiforme:
Il flusso elettrico elementare attraverso una superficie infinitesima vale $\Delta\Phi_E = E\,\Delta A\cos\theta$.
Se la superficie è perpendicolare alle linee di campo $\cos\theta = 1$ $\quad\Delta\Phi_E = E\,\Delta A$
Se la superficie è una sfera di raggio r
$\int\Delta A = 4\pi r^2$ $\quad\Phi_E = E\,4\pi r^2$

ma il campo vale $\mathbf{E = F/q}$ ovvero $E = kQ/r^2$ $\quad\Phi_E = kQ/r^2 \times 4\pi r^2 = 4\pi kQ$
ponendo $\varepsilon_0 = 1/4\pi k$ (permettività) avremo $\quad\Phi_E = Q/\varepsilon_0$

Altre cariche situate fuori dalla sfera non contribuiscono al variare del flusso perché tanto campo entra e tanto ne esce.

Legge di Gauss e di Coulomb

Dalla legge di Coulomb si trova che il campo creato da una carica puntiforme q a distanza r è: $E = q / 4 \pi \varepsilon_0 r^2$

Per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico E è collegato con la carica q interna ad una superficie chiusa dalla formula:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{int}}$$

Se la carica è puntiforme, ragioni di simmetria ci dicono che il campo è radiale quindi potremo usare come superficie Gaussiana una superficie sferica

$$\varepsilon_0 \vec{E} \oint d\vec{A} = q_{\text{int}}$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Carica a simmetria sferica

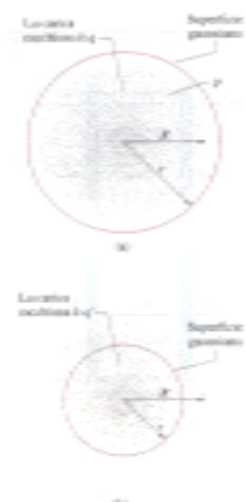
Se invece abbiamo una carica con distribuzione uniforme sulla tangente e arbitraria sul raggio (vedi figure in basso) allora possiamo calcolare il campo con lo stesso procedimento usato nel caso del guscio.

Nel caso (a) il campo è a distanza r è il campo ottenuto come se la carica fosse al centro della sfera $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$

Nel caso (b) il campo è il campo dovuto alla sola carica interna q′ ovvero $E = q'/4\pi\varepsilon_0 r^2$ e per calcolare q′ si fa una proporzione

$$\frac{q'}{4/3\pi r^3} = \frac{q}{4/3\pi R^3} \qquad q' = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r \qquad r \leq R$$



Potenza del teorema di Gauss

Supponiamo di voler conoscere il campo elettrico generato da un filo carico (con densità λ) di lunghezza infinita.

In questo caso costruire una sfera attorno al filo non risulterebbe vantaggioso perché la distanza dalla carica alla superficie sarebbe una funzione complessa, mentre se costruiamo un cilindro attorno alla distribuzione di carica lineare tutto è più semplice.

Attraverso le due basi il contributo al flusso totale è nullo perché il campo ha simmetria radiale; mentre il flusso attraverso la superficie laterale vale:

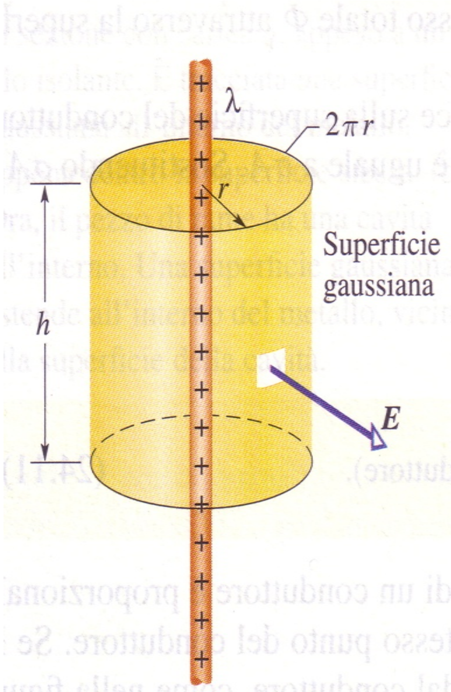
$$\Phi = EA\cos\theta = E(2\pi rh)\cos\theta$$

La carica racchiusa all'interno della superficie è λh. Per il teorema di gauss

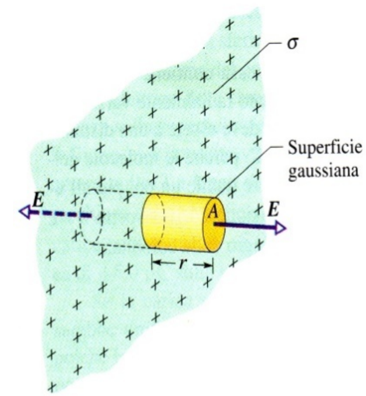
$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

ovvero

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



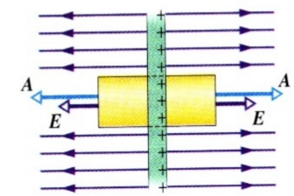
Campo elettrico di una lastra carica isolante



(a)

- Il valore del campo elettrico generato da una distribuzione piana si può trovare utilizzando il teorema di Gauss.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{int}}$$



(b)

- Disegniamo una superficie chiusa cilindrica con le basi parallele alla distribuzione piana e la superficie laterale che attraversi la lamina (vedi figura).
- Per ragioni di simmetria si nota che il campo è perpendicolare alla lamina.

Allora $\varepsilon_0 = (EA + EA) = \sigma A$

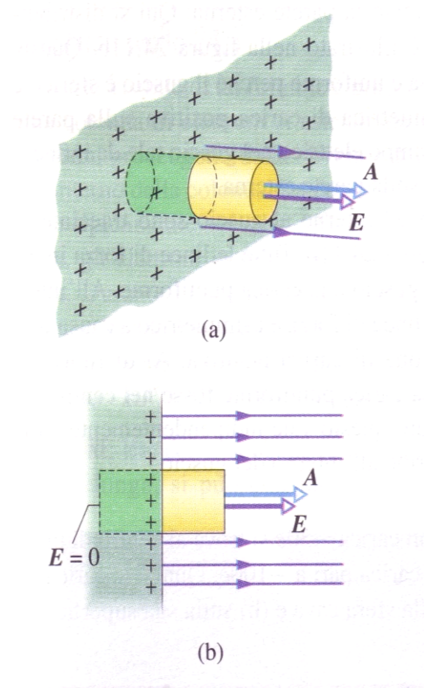
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La semplicità con cui si ottiene questo risultato è una conferma della potenza del teorema di Gauss.

P.S. Si noti che, come per il caso del campo generato da un disco uniformemente carico, per distanze finite il campo non dipende da r.

Campo elettrico di una superficie carica

ISBN 88-408-1243-1



- Se volessimo calcolare il campo nei pressi di una superficie molto grande, con densità di carica σ, superficie possiamo usare il teorema di Gauss assumendo il campo è costante.
- Le sue linee non attraversano la superficie laterale, mentre attraversano una sola superficie di base.

$\varepsilon_0 EA = \sigma A$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- La differenza con il campo della lamina isolante è dovuta al fatto che all'interno del conduttore il campo elettrico E è 0.
- Mentre per la lamina la stessa densità di carica contribuisce sia a destra che a sinistra

Energia potenziale e Potenziale

Se, in un campo elettrico, cerchiamo di spostare una carica q da un punto “iniziale” ad un punto “finale”, facciamo un lavoro meccanico che è pari, ed opposto, al lavoro che fa il campo elettrico $w_{mecc} = - w_{ele}$.

Il lavoro elettrico dipende solo dalle posizioni iniziali e finali della carica; il campo elettrico E è una grandezza conservativa .

E’ quindi possibile attribuire ad una carica q, immersa in un campo elettrico, una energia potenziale elettrica $U(p)$.

Pertanto una carica di prova q_0, passando dal punto A al punto B avrà due diversi potenziali, la cui differenza è

$$U(A) – U(B) = w_{ele} = - w_{mecc}$$

Se poniamo $U(B) = U(\infty) = 0$ avremo che l’energia potenziale $U(A)$ è il lavoro che una forza elettrica $F_e = q_0E$ compie per portare una carica da ∞ al punto A.

Il potenziale elettrico $V(p)$ generato da una carica Q è l’energia potenziale $U(p)$, posseduta da una carica unitaria q_0 *posta nel punto p*

$$V(p) = U(p)/q_0$$

Il Potenziale

Siccome l'energia potenziale *U* dipende da *w* ed *w* dipende da q; se raddoppiamo la carica esploratrice troveremo che anche il lavoro è raddoppiato e quindi anche *U*. Possiamo concludere che esiste una funzione *V* indipendente dalla carica esploratrice, funzione solo del campo E in discussione.

$V = U/q$ e naturalmente $\Delta V = V_f - V_i = U_f/q - U_i/q = \Delta U/q$

La differenza di potenziale ΔV è una funzione della posizione

$$V_f - V_i = - w/q$$

e ci dice che la d.d.p. ΔV è il lavoro necessario alla forza elettrostatica di spostare una carica unitaria fra due punti, e può essere positiva o negativa.

Se l'energia potenziale è nulla all'infinito anche il potenziale è nullo all'infinito, quindi

$$V = -\frac{w_\infty}{q}$$

L' unità di misura del potenziale è [J/C] e si chiama Volt (V) pertanto il campo elettrico E sarà definito come [V/m].
Per spostare un elettrone attraverso una differenza di potenziale di un volt è necessaria una energia di un elettronvolt [eV] $1eV = (1.6\ 10^{-19}\ C)\ (1J/C) = 1{,}6\ 10^{-19}\ J$

Calcolo del Potenziale

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Definizione di Lavoro

$$dL = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Lavoro di un campo elettrico

$$L = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Calcolo integrale

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Relazione fra Lavoro e d.d.p.

$$V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ponendo $V_i = 0$

Superfici equipotenziali

Una superficie equipotenziale è il luogo geometrico dove il potenziale è uguale.

La superficie può essere una reale o immaginaria.

Spostare una particella carica su una superficie equipotenziale non costa lavoro.

Una superficie equipotenziale è perpendicolare alle linee di forza