TRASFORMAZIONI CANONICHE INFINITESIME (e quantità conservate)

Nuove variabili differiscono da quelle vecchie solo per quantità infinitesime (⇝ nei conti possiamo sempre trascurare termini di ordine alto)

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i$$
$$\tilde{p}_i = p_i + \delta p_i$$

variazioni infinitesime

$$\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i$$

FUNZIONE GENERATRICE : $\epsilon \ll 1$

genera identità

$$F_2(q,\tilde{p},t) = \sum_h q_h \tilde{p}_h + \epsilon\, G(q,\tilde{p},t)$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \tilde{p}_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h} \Rightarrow \delta p_h = \tilde{p}_h - p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = q_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h} \Rightarrow \delta q_h = \tilde{q}_h - q_h = \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h}$$

$$G(q,\tilde{p},t) = G(q, p+\delta p, t)$$

$$\Rightarrow \delta p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q, \underset{O(\epsilon)}{p+\delta p}, t) \underset{\text{espando in } \epsilon}{=} -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q,p,t) + O(\epsilon^2)$$

→ confondendo p con $\tilde{p}$ in G e ∂G commettiamo errore di ordine superiore (trascurabile nell'approssim. $\epsilon \ll 1$)

↓

$$\begin{cases} \delta p_k = -\epsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_k}(q,p,t) \\[2ex] \delta q_k = \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_k}(q,p,t) \end{cases} \quad (*)$$

$$\delta x = \epsilon E \nabla_x G(x,t)$$

La funzione G è detta FUNZIONE GENERATRICE o GENERATORE delle trasf. canonica infinitesima.

Presa una VARIABILE DINAMICA, cioè una funz. $f(\bar{p},\bar{q},t)$, la sua variazione sotto la trasf. infinitesima (*) è

$$\delta f = \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_h}\delta p_h + \frac{\partial f}{\partial q_h}\delta q_h\right) = \sum_h\left[\frac{\partial f}{\partial p_h}\left(-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_h}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_h}\left(\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_h}\right)\right]$$

$= f(p+\delta p, q+\delta q, t) - f(p,q,t)$

$\delta f = \sum_i \partial_i f\, \delta x_i = \epsilon \sum_{i,j} \partial_i f\, E_{ij}\partial_j G = \epsilon\{f,G\}$

$$\rightarrow \delta f = \epsilon\sum_h\left(\frac{\partial f}{\partial q_h}\frac{\partial G}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial G}{\partial q_h}\right) = \epsilon\{f, G\}$$

Prendiamo l'Hamiltoniana; la sua variazione sotto trasf. infinitesima indip. dal tempo è

$$\delta H = \epsilon\{H, G\} \qquad (\delta H = K - H = \tilde{H} - H + \cancel{\ldots})$$

$\Rightarrow$ Se H è invariante per la trasf. infinitesima generata da G allora $G(\bar{p},\bar{q})$ è una COSTANTE DEL MOTO

↪ versione Hamiltoniana del teorema di Nöther

Abbiamo qualcosa in più rispetto al caso Lagrangiano: la cost. del moto G GENERA le trasf. stesse.

Se consideriamo trasf. canonica dip. da t ($G = G(p,q,t)$), allora

$$\underset{K-H}{\delta H} = \epsilon\{H, G\} + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} = \epsilon\frac{d}{dt}G$$

da $\frac{\partial F_2}{\partial t}$

, cioè ancora generatore G è cost. del moto se H rimane invariata.

ES. MOMENTO ANGOLARE $\longleftrightarrow$ invarianza per ROTAZIONI

$\Rightarrow$ Momento angolare dovrebbe essere il generatore delle rotazioni infinitesime

M_z (dovrebbe generare rotaz. attorno asse z)

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon & 0 \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon\, p_x - \sin\epsilon\, p_y \\ \sin\epsilon\, p_x + \cos\epsilon\, p_y \\ p_z \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{\epsilon \ll 1}{\simeq} \begin{pmatrix} p_x - \epsilon p_y \\ \epsilon p_x + p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta p_x = -\epsilon p_y \\ \delta p_y = \epsilon p_x \\ \delta p_z = 0 \end{cases}$$ (lo stesso per le q)

Voglio dimostrare che $\delta p_e = -\epsilon \{ M_z, p_e \}$

$$\{M_i, p_e\} = \sum_m \epsilon_{iem} p_m \rightarrow \begin{aligned} \{M_z, p_x\} &= \sum_m \epsilon_{31m} p_m = p_y \\ \{M_z, p_y\} &= \sum_m \epsilon_{32m} p_m = -p_x \\ \{M_z, p_z\} &= \sum_m \epsilon_{33m} p_m = 0 \end{aligned}$$

Il MOMENTO ANGOLARE genera le rotazioni ($SO(3)$) infinitesime

[Usando questi risultati, si può dim. che il vettore di Runge-Lenz $\bar{A}$ (assieme a $\bar{M}$) genera il gruppo $SO(4)$.]

Rotazioni: trasf. canonica (puntuale estesa) dipendente da parametro continuo α (angolo di rotazione).

$$\tilde{x} \mapsto x = x(\tilde{x}, \alpha)$$

Flusso Hamiltoniano: trasformazione canonica dipendente da un parametro continuo t.

$$\tilde{x} \mapsto x = x(\tilde{x}, t)$$

$\rightsquigarrow$ traslazione temporale

$x_0 \mapsto x(t; x_0)$

$\shortparallel$

$x(0; x_0)$

$$\delta x = x(\tilde{x}, \delta t) - \tilde{x} \underset{\nearrow}{=} \dot{x}(\tilde{x}, 0)\underbrace{\delta t}_{\epsilon}$$

esp. Taylor attorno $\underset{\underset{\delta t}{\uparrow}}{\epsilon} = 0$

D'altra parte $\delta x = \epsilon\{x, G\}$. Cos'è G?

$\dot{x} \underset{\uparrow}{=} E\nabla_x H = \{x, H\} \Rightarrow H$ è il generatore di traslazioni temporali

per flusso Ham. con Hamiltoniana H

(intese come evoluz. col flusso Hamilt. generato da H ovvero dal campo vettoriale Hamiltoniano $E\nabla_x H$)

Quindi dato il generatore H di trasf. temp infinitesime, le trasf. finite sono ottenute integrando l'eq. diff.

$\dot{x} = E\nabla_x H$, cioè trovando il flusso Hamilt. associato a H

Formalmente questo è vero per ogni generatore di trasf. infinitesime

$$\tilde{x} \to x(\tilde{x}, \epsilon) = \tilde{x} + \underbrace{\frac{dx}{d\epsilon}\cdot\epsilon}_{\delta x = \epsilon\{x, G\}}$$

G può essere interpretato come un'Hamiltoniana, il cui flusso Ham. corrisponde alle trasformazioni generate da G. G è anche detta MOMENT MAP (μ) associata al gruppo di trasf. dato.

EQUAZIONE DI HAMILTON – JACOBI (HJ)

Le trasf. canoniche permettono di tradurre un sistema Hamilt. con eq. diff. (canoniche) difficili in un sistema equivalente con Ham. K ed eq. diff. (canoniche) semplici.

Esiste una prescrizione per trovare una trasf. canonica che dia $K=0$?

↳ In questo caso avrei: $\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_k = 0 \\ \dot{\tilde{q}}_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{p}_k(t) = \tilde{p}_k^0 \\ \tilde{q}_k(t) = \tilde{q}_k^0 \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} p_h(t) = u_h(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \\ q_h(t) = v_h(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \end{array}\right\}$$ risolvono eq. di Ham. con Hamiltoniana $H(p,q,t)$

Tale prescrizione è data dall'eq. di HJ

Cerchiamo trasf. canonica t.c. $K=0$. K è legata a H dalla relazione

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_a}{\partial t} \quad (\text{funz. gen.} \quad a=1,2,3,4)$$

→ cerchiamo una funz. generatrice $(F_2(\tilde{p},q,t))$ t.c.

$$\underbrace{\tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}}_{K} = 0$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\boxed{H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$ eq. di HJ.

Eq. (alle derivate parziali) nell' incognita $F_2(\tilde{p}, q, t)$.

Una volta risolta, otteniamo F_2 cioè la trasf. canonica cercata.

Di solito l'incognita dell' eq. di HJ viene chiamata S (e non F_2).

L'eq. ammette un INTEGRALE COMPLETO se $\exists$ una famiglia di soluzioni

$$S(q_1, q_2, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sono parametri indip. (cost. di integraz.)

Eq. di HJ contiene solo le derivate parziali di S (non anche S stessa) $\Rightarrow$ se S è soluz., anche $S + \alpha$ è sol.

$\rightarrow$ possiamo trascurare questo parametro e scrivere la soluz. dip. da n parametri

$$S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\downarrow$

Data questa fam. di sol., possiamo identificare $\alpha_i \equiv \tilde{p}_i$

$\hookrightarrow$ $p_h = \dfrac{\partial S}{\partial q_h}$ $\qquad$ $\tilde{q} = \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{p}_h}$ $\nwarrow$ $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_h}$

Quando H è indip. dal tempo, allora

$$S[\bar{q}, t; \bar{\alpha}] = W[\bar{q}; \bar{\alpha}] - at \qquad \text{è soluz. di HJ}$$

con W soddisfa eq. (di HJ ridotta)

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = a \qquad a \text{ cost.}$$

↳ eq. con incognite $\underbrace{W \quad e \quad a}$

↳ dip. da n parametri $\alpha_1 \dots \alpha_n$

↳ soluz.: $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

W genera una trasf. canonica indip. dal t che mette H in $K(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

eq. di Ham. semplicissime

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^0$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} \text{ cost.} \quad \longrightarrow \quad \tilde{q}_h(t) = t \cdot \underbrace{\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}}_{= \omega_h} + \tilde{q}_h^0$$

OSSERV.

Flusso Hamiltoniano è trasf. canonica che porta H in $K=0$; ma lo sono anche tutte le trasf. che sono composizione di flusso Ham. con trasf. canonica indip. dal tempo.

W genera una trasf. canonica indip. dal t che muta H in $K(\tilde{p}_1, \dots, \hat{p}_n) \equiv a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

Nuove eq. di Ham. sono allora semplicissime

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \qquad \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^{(0)}$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}_h} \text{ cost.} \Rightarrow \tilde{q}_h(t) = \underbrace{\frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}_h}}_{\omega_h} t + \tilde{q}_h^{(0)}$$

Flusso Hamiltoniano è trasf. can. che porta H a $K=0$; ma anche qui composizione di tale trasf. con una trasf. can. indip. dal tempo.

Esempio: Oscillatore armonico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \qquad (n=1)$$

$\rightarrow$ Eq. H-J: $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

H è indip. da t $\rightarrow S(q, t; \tilde{p}) = W(q, \tilde{p}) - a t$

$$\rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = a \qquad (A)$$

Eq. di H-J ridotta per l'oscill. armonico

$\tilde{p} \equiv I$

$\updownarrow$

$a = \omega \alpha$

$\tilde{q} \equiv \psi$

Abbiamo una sola cost. α (non-additiva)

Risolviamo (A):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\omega I - m^2\omega^2 q^2$$

$$W(q; I) = \sqrt{2m\omega I}\int_{q_0}^{q}\sqrt{1 - \frac{m\omega q'^2}{2I}}\, dq' = \int_{q_0}^{q}\sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q^2}\, dq$$

A noi interessano le derivate di W rispetto a q e I per ottenere la trasf. canonica cercata

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q, I) \qquad \psi = \frac{\partial W}{\partial I}(q, I)$$

invertire $\rightsquigarrow$ $q = q(I, \psi)$

successiv. sostituiamo a sinistra

$\rightsquigarrow$ $p = p(I, \psi)$

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial I} = \int_{q_0}^{q} \frac{2m\omega}{2\sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q'^2}}\, dq'$$

$$x \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\, q'$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2I}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2I} q'^2}} = \int_{\sqrt{\frac{m\omega}{2I}} q_0}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2I}} q} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\, q\right) - \psi_0 = \psi(I, q)$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\omega I}\sqrt{1 - \frac{m\omega q^2}{2I}} = p(I, q)$$

TRASF. CANONICA

- Invertiamo $\psi = \psi(I, q) \Rightarrow$ $\boxed{q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \operatorname{sen}(\psi + \psi_0)}$ $v(\tilde{p}, \tilde{q})$
- sostituiamo in $p = p(I, q) \Rightarrow$ $\boxed{p = \sqrt{2m\omega I} \cos(\psi + \psi_0)}$ $u(\tilde{p}, \tilde{q})$

$$K(I, \psi) = H(u(I, \psi), v(I, \psi)) = \frac{1}{2m}\Big(\underline{2m\omega I} \cos^2(\psi + \psi_0) +$$

trasf. can. indip. dal t

$$+ \underline{m^2\omega^2 \frac{2I}{m\omega}} \operatorname{sen}^2(\psi + \psi_0) \Big) =$$

$$= \frac{2m\omega}{2m} I \left(\cos^2(\psi + \psi_0) + \operatorname{sen}^2(\psi + \psi_0) \right)$$

$$= \omega I$$

$\Rightarrow$ Eq. di Ham. in I, ψ sono

$$\begin{cases} \dot{I} = -\dfrac{\partial K}{\partial \psi} = 0 & \Rightarrow \quad I \text{ cost.} \\ \dot{\psi} = \dfrac{\partial K}{\partial I} = \omega & \Rightarrow \quad \psi(t) = \omega t + \underbrace{\hat{\psi}}_{\text{cost.}} \end{cases} \longrightarrow$$

$q_0 = q(t=0)$
$\Downarrow$
$\psi + \psi_0 = \psi_0$ a $t=0$
$\Rightarrow \hat{\psi} = 0$

$$\rightarrow \quad q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin(\omega t + \psi_0)$$

sol. dell'osc. arm.

I viene chiamata "variabile azione"
ψ " " "variabile angolo"

Esempio: HJ per il problema di Keplero in 3d

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + V(r)$$

Eq H-J :

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \varphi} ; r, \theta, \varphi \right) = E_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$$

Cerchiamo soluz. della forma

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi)$$

$\rightarrow$ eq. diventa :

$$\frac{1}{2m}\left[(W_r')^2 + \frac{(W_\theta')^2}{r^2} + \frac{(W_\varphi')^2}{r^2\sin^2\theta} \right] + V(r) = E_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$$

φ è coord. ciclica, cioè non compare in H
$\Rightarrow$ possiamo scegliere $W_\varphi = \alpha_\varphi \cdot \varphi$

$$\left[\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \right.$$
φ ciclica $\Rightarrow$ p_φ è cost. del moto. $\Big]$

$\downarrow$ riduciamo il problema a due variabili

$$\frac{1}{2m}\left[(W_r')^2 + \frac{(W_\theta')^2}{r^2} + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + V(r) = E_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_\varphi}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\left\{\frac{1}{2m}(W_r')^2 + V(r) - E_{\alpha_1\alpha_2\alpha_\varphi}\right\}\cdot r^2}_{\text{LHS dip solo da } r} = \underbrace{-\frac{1}{2m}\left[(W_\theta')^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right]}_{\text{RHS dip. solo da } \theta}$$

$\Rightarrow$ sia LHS che RHS sono indip. da r e θ

(perché LHS = RHS)

cioè sia LHS che RHS sono uguali a una cost. che chiamiamo $-\frac{\alpha_\theta^2}{2m}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (W_\theta')^2 + \dfrac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \\ (W_r')^2 + \dfrac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\,(E_{\alpha_1\alpha_\theta\alpha_\varphi} - V(r)) \end{cases}$$

$\downarrow$ scegliamo $\alpha_1 = E$

Le cost. di integrazione sono $\alpha_\varphi, \alpha_\theta, E$:

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi \quad \rightarrow \quad M_z$$

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \quad \rightarrow \quad \bar{M}^2$$

$$E = \alpha_1 \quad \rightarrow \quad E$$

Eq. di H-J si risolve per quadrature

$$W_r(r) = \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\theta^2}{r'^2}}\, dr' \qquad W_\theta(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta'}}\, d\theta'$$

$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi$$

(Quando $\alpha_\theta = \alpha_\varphi$, θ è fissato $\left((W')^2 \geq 0 \Rightarrow |\operatorname{sen}\theta| = 1 \right)$)

$$K(E, \alpha_\varphi, \alpha_\theta) = E$$

$$\dot{E} = 0 \qquad \dot{\alpha}_\varphi = 0 \qquad \dot{\alpha}_\theta = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \alpha_\varphi} = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_\theta = \frac{\partial K}{\partial \alpha_\theta} = 0$$

$$\dot{\tilde{q}}_E = \frac{\partial K}{\partial E} = 1 \longrightarrow \tilde{q}_E(t) = t + t_0$$

$$\underbrace{\tilde{q}_\varphi}_{\text{cost.}} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \frac{\partial W_\theta(\theta)}{\partial \alpha_\varphi}$$

$$\underbrace{\tilde{q}_\theta}_{\text{cost.}} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_\theta}$$

$$\underbrace{\tilde{q}_E}_{t+t_0} = \frac{\partial W_r}{\partial E}$$ } legge oraria per problema di Keplero.

$$W_r(r) = \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\theta^2}{r'^2}}\, dr'$$

$$t + t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{2m\, dr'}{2\sqrt{2m\left(E - \underbrace{V(r') - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr'^2}}_{-V_{eff}(r')}\right)}}$$

(nella trattazione Lagrangiana avevamo preso $\alpha_\theta = \alpha_\varphi$)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ell$ ″

M_i sono cost. del moto : $\{M_i, H\}=0$ se H è inv. per rotaz.

$$\Rightarrow \{\bar{M}^2, H\} = \sum_{i=1}^{3} \{M_i \cdot M_i, H\} = \sum_{i=1}^{3} 2M_i \{M_i, H\} = 0$$

$\Rightarrow \bar{M}^2$ è una cost. del moto.

Inoltre

sim. in $i \leftrightarrow k$

$$\underline{\{\bar{M}^2, M_j\}} = \sum_i \{M_i^2, M_j\} = \sum_i 2M_i \{M_i, M_j\} = \sum_{ik} 2 M_i \epsilon_{kij} M_k = \underline{0}$$

antisimm. in $k \leftrightarrow i$

H è una cost. del moto quando

$$\frac{d}{dt} H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) = 0$$

soddisf. eq. Ham.

Cioè quando

$$\underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad H \text{ è cost. del moto } (E) \text{ quando non dip. esplicitam. dal tempo.}$$

(per antisimmetria delle Parentesi di Poisson)