SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Hamilt. con $H(\bar p, \bar q)$ a n gradi di libertà è chiamato canonicam. integrabile se $\exists$ una trasf. canonica

$$\begin{cases} \bar p = \bar u(\bar J, \bar\varphi) \\ \bar q = \bar v(\bar J, \bar\varphi) \end{cases}$$

con $\bar u$ e $\bar v$ periodiche nelle coord. φ_h

a nuove variabili $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$

(dette VARIABILI AZIONE - ANGOLO) t.c. la nuova Ham. è

$$K = H(\bar u(J,\varphi), \bar v(J,\varphi)) \equiv K(J_1, \dots, J_n)$$

(Si dice integrabile secondo Liouville nel dominio $D' \subset T^*Q$ se $D' = w(B \times T^n)$)

Allora
$$\begin{cases} \dot J_h = 0 \\ \dot\varphi_h = \dfrac{\partial K}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} J_h(t) &= J_h^0 \\ \varphi_h(t) &= \varphi_0 + \underbrace{\omega_h(J)}_{\text{cost.}} t \end{aligned}$$

In questa situazione, $J_1, \dots, J_n$ sono n costanti del moto che sono in involuzione tra di loro, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h,k$.

$\mathbb{T}^n$ è un TORO n-dimensionale $(\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}})$

↳ le variabili φ_h sono degli angoli di PERIODO 2π

$\Rightarrow$ $\varphi_h(t)$ sono funzioni periodiche di periodo

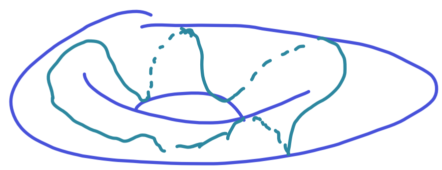
$$T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

[T_h è il tempo in cui $\varphi_h(T_h) = \varphi_h(0) + 2\pi$]

$\Rightarrow$ Le traiettorie nello sp. delle fasi sono limitate e quasi-periodiche. [Le traiettorie giacciono su sottoinsiemi dove J_h sono cost., e sono dei cerchi nelle direz. φ_h].

Sp. delle fasi è $2n$-dim. Lo spazio dove i J sono cost. è n-dim. e isomorfo a T^n. Le traiettorie sono curve in T^n.

$n=2$ $\quad T^2$



moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_n è $\in \mathbb{Q}$.

Le traiettorie sono indipendenti dal sistema di coordinate usato per descriv.

$\Rightarrow$ il moto in $(\bar{p}, \bar{q})$ è pure un moto limitato e quasi-periodico.

<u>Teorema</u>. Preso sist. Ham. con n gradi di lib.

Ammettiamo che ESISTANO n COSTANTI DEL MOTO

$$f_i(\bar{p}, \bar{q}) \quad i = 1, \dots, n \quad , \text{ indip. e in INVOLUZIONE}$$

$$(\{f_i, f_j\} = 0 \quad \forall i,j).$$

Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, l'insieme di livello

$$\mathcal{M}_{\bar{a}} = \{ f_i(\bar{p}, \bar{q}) = a_i \}$$ sia compatto e connesso.

$\Rightarrow$ il sist. è integrabile ($\exists$ trasf. canonica
(Arnold) a $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$)

$\mathcal{M}_{\bar{a}}$ sarà parametrizzato dagli angoli φ_n ; variando φ_n ottengo una curva γ_n in $\mathcal{M}_{\bar{a}}$.

Def. Le variabili azione sono def. da

$$J_h = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_h} \sum_{j=1}^{n} p_j \, dq_j$$

J_h dipendono solo dalle cost. del moto f_h e sono anche loro indip. e in involuzione (i $\tilde{p}$ devono avere Par. Poisson nulle fra di loro)

$\Rightarrow$ si dim. che le variabili canonicam. coniugate alle J_h sono proprio angoli di periodo 2π.

$$\Rightarrow \quad T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

Osservazione: il sistema di un corpo in un campo di forze centrali con $V = V(r)$ è un sist. integrabile. In particolare si nota che $\exists$ $n=3$ cost. del moto in involuzione: $H, M_z, \bar{M}^2$

$$\{H, M_z\} = 0$$
$$\{H, \bar{M}^2\} = 0$$
$$\{\bar{M}^2, M_z\} = 0$$

Osservazione: la trottola è un sistema integrabile. È sist. a $n=3$ gradi di lib. e ho 3 cost. del moto in involuz.: H, p_φ, p_ψ $\quad \{p_\varphi, p_\psi\} = 0$ perchè sono momenti coniugati!

Osservazione: tutti i sistemi a 1 grado di lib. ($n=1$) con Hamiltoniana indip. (esplicitam.) dal tempo sono integrabili. Infatti $\exists$ n=1 integrale del moto t.c. con $\{H,H\}=0$.

Osservazione: Sistemi integrabili (sistemi armonici, corpo rigido con pto fisso e zero forze esterne o con gravità, problema di Keplero o in generale moto centrale) sono in genere risolubili con altri approcci rispetto q.lo Hamiltoniano.

Perché si introduce q.to formalismo?

Inoltre, i sistemi in natura sono tipicamente non-integrabili. Però spesso sono approssimabili con sist. integrabili e il formalismo Hamiltoniano è molto utile per trattare questa approssimazione (Teoria delle perturbazioni)

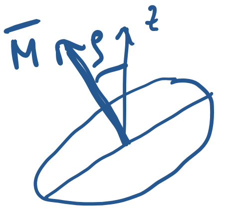
VARIABILI AZIONE – ANGOLO PER PROBL. KEPLERIANO 3d.

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}$$

$$|\bar{M}|^2 = |m\dot{\bar{r}} \times \bar{r}|^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} \leftarrow \text{cost.}$$

$$M_z = p_\varphi \quad \leftarrow \text{cost.}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) \qquad p_r = m\dot{r} \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \qquad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$



$$p_\varphi = |\bar{M}|\cos\rho$$

3 cost. del moto in INVOLUZIONE : $|\bar{M}|^2, M_z, H$ $\quad (\ell, p_\varphi, E)$

→ variabili azione saranno funzioni di ℓ, p_φ, E

→ assunzioni del teorema di Arnold sono soddisfatte

→ coord. angolari φ, θ

↳ variano in un range limitato e le p corrispondenti pure variano e come variano dato da relaz. cost. del moto = cost.

↳ orbite chiuse in spazio delle fasi.

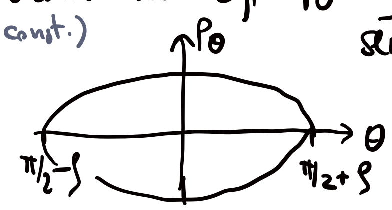
Azioni

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_\varphi} \overset{\text{cost.}}{p_\varphi}\, d\varphi = p_\varphi$$

γ_φ is the circle obtained by varying φ and keeping $r, \theta, p_r, p_\theta, p_\varphi$ fixed

γ_θ è data da eq. $p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = |M|^2 = \ell^2$

(r, φ remain const.)



$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_\theta} p_\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2-\rho}^{\frac{\pi}{2}+\rho} \sqrt{\ell^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta \qquad p_\varphi = \ell\cos\rho$$

$$1 - \frac{\cos^2\rho}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\rho}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\rho - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= -\frac{4\ell}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/2-\rho}\sqrt{1-\frac{\cos^2\rho}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$\cos\theta = \sin\rho\,\sin\varphi$

$-\sin\theta\,d\theta = \sin\rho\cos\varphi\,d\varphi$

$$= -\frac{4\ell}{2\pi}\int^{\pi/2-\rho}\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\sin^2\rho-\cos^2\theta}\,d\theta \overset{!}{=}$$

$$= +\frac{2\ell}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\rho-\sin^2\rho\sin^2\varphi}\;\frac{\sin\rho\cos\varphi}{\sin^2\theta}\,d\varphi$$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\sin^2\rho\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{1-\sin^2\rho\sin^2\varphi}\,d\varphi \overset{u=\operatorname{tg}\varphi}{=}$$

$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$

$du = (1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi \to d\varphi = \frac{du}{1+u^2}$

$+u^2\cos^2\rho - u^2\cos^2\rho$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\cancel{\sin^2\rho}\int_0^\infty\frac{1(1-\cos^2\rho)}{\underbrace{1+u^2-\sin^2\rho\,u^2}_{1+\cos^2\rho\,u^2}}\;\frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\int_0^\infty\frac{(1+u^2\cos^2\rho)-\cos^2\rho(1+u^2)}{(1+u^2\cos^2\rho)(1+u^2)}\,du$$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{\cos^2\rho}{1+u^2\cos^2\rho}\right)du =$$

$u' = \cos\rho\,u$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2} - \frac{2\ell}{\pi}\cos\rho\int_0^\infty\frac{du'}{1+u'^2}$$

$$= \frac{2\ell}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\rho\right) = \ell(1-\cos\rho)$$

$$\Longrightarrow \ell = J_\theta + J_\varphi$$

$J_\varphi = \alpha_\varphi$

$J_\theta = \alpha_\theta - \alpha_\varphi$

$J_r = -\alpha_\theta + k\sqrt{\frac{m}{-2E}}$

mettere questo in W e per $\psi_{\varphi,\theta,r} = \frac{\partial W}{\partial J_{\varphi,\theta,r}}$

$\ell = \alpha_\theta \quad p_\varphi = \alpha_\varphi$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r \, dr$$

γ_r da H e $|\vec{M}^2| = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}$$

γ_r, varying r, p_r keeping all the rest fixed $\longrightarrow$

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}$$

$$\rightarrow p_r^2 = \underbrace{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{\ell^2}{r^2}}_{2m(E - V_{eff})} \geq 0$$

$$r_{\substack{max\\min}} = a\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{mka}}\right]$$

$$a = \frac{-k}{2E} > 0$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{r^2}} \, dr$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{\qquad} \, dr = -(J_\theta + J_\varphi) + k\sqrt{\frac{m}{-2E}}$$

$$H = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2} \rightarrow K(J_r, J_\theta, J_\varphi)$$

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3} = mk^2\left(\frac{-2E}{mk^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{mk^2}\left(\frac{mk^2}{-2E}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$\leadsto$ Otteniamo il periodo delle orbite, senza dover risolvere esplicitam. il problema di determinare l'orbita (che corrisponde a invertire la trasf. canonica)

$$\frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{r}\right)-\frac{(J_\theta+J_\varphi)^2}{r^2}}\,dr = \frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2mk}{\ell^2 r}-\frac{1}{r^2}}\,dr =$$

$$= \frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\left(\frac{mk}{\ell^2}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{mk}{\ell^2}\right)^2}\,dr =$$

$$= \frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\left(\frac{mk}{\ell^2}\right)\sqrt{\left(\frac{2E\ell^2}{mk^2}+1\right)-\left(\frac{1}{r}\frac{\ell^2}{mk}-1\right)}\,dr$$

$$= \frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\left(\frac{mk}{\ell^2}\right)\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{e^2-e^2\left(\frac{\eta}{er}-\frac{1}{e}\right)^2}\,dr$$

$$=\frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\,\frac{e}{\eta}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{er}-\frac{1}{e}\right)^2}\,dr$$

$r = x\frac{\eta}{e}$

$$=\frac{(J_\theta+J_\varphi)}{\pi}\int_{\frac{e}{1+e}}^{\frac{e}{1-e}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2}\,dx \qquad (*)$$

$\frac{e}{\eta}\, r_{max/min} = \frac{e}{1\mp e}$

$\ell = J_\theta + J_\varphi$

$\frac{1}{\eta} = \frac{mk}{\ell^2}$

$e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}$

$r_{max/min} = a\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{\ell^2}{mka}}\right]$

$a = -\frac{k}{2E} > 0$

$= -\frac{k}{2E}(1\pm e) > 0$ for closed orbit

$r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$

$r_{max/min} = \frac{\eta}{1\mp e} = \frac{mk}{\ell^2(1\mp e)}$

$\frac{\eta}{(1\mp e)}\frac{(1\pm e)}{(1\pm e)} = \frac{\eta(1\pm e)}{-2E\ell^2/mk^2} = \frac{\eta(1\pm e)}{-\frac{2E}{k}\eta} = -\frac{k}{2E}(1\pm e)$

$\frac{e}{1-e} = \frac{e-1}{1-e} + \frac{1}{1-e} = \frac{1}{1-e} - 1 > 1$

$\frac{e}{1+e} = \frac{e+1}{1+e} - \frac{1}{1+e} = 1 - \frac{1}{1+e} < 1$

$$1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2\Big|_{\frac{e}{1\pm e}} =$$

$$= 1-\left(\frac{1}{e}-\frac{1\pm e}{e}\right)^2 =$$

$$= 1-\left(\frac{1-1\mp e}{e}\right)^2 = 0$$

ovvio, perché $p_r = 0$ agli estremi. (integrando)

$r_{max} = \frac{e}{1-e}$ $\quad r < r_{max} = (1-\epsilon)\frac{e}{1-e} = \frac{e}{(1+\epsilon)(1-e)}$

$$1-\left(\frac{1}{e}-\frac{(1+\epsilon)(1-e)}{e}\right)^2 =$$

$$= 1-\left(\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+e-\epsilon(1-e)}{e}\right)^2 =$$

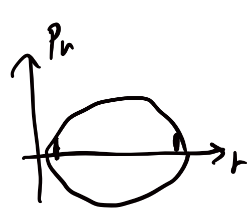
$$= 1-\left(+1-\epsilon\overbrace{\left(\frac{1-e}{e}\right)}^{>0}\right)^2 = 0^+$$

$r_{min} = \frac{e}{1+e}$ $\quad r > r_{min} = (1+\epsilon)\frac{e}{1+e} = \frac{e}{(1-\epsilon)(1+e)}$

$$1-\left(\frac{1}{e}-\frac{(1-\epsilon)(1+e)}{e}\right)^2 = 1-\left(\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-e+\epsilon(1+e)}{e}\right)^2 =$$

$$= 1-\left(-1+\epsilon\overbrace{\left(\frac{1+e}{e}\right)}^{>0}\right)^2 = 0^+$$

ammo



⊛ $$\int_{\frac{e}{1+e}}^{\frac{e}{1-e}} \sqrt{\underbrace{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2}}\, dx =$$

$$1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ex}-\frac{1}{e^2} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1-e}{e}\right)\left(\frac{1+e}{e}-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{e}{(1-e)x}-1\right)\left(1-\frac{e}{(1+e)x}\right)\frac{1-e^2}{e^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{e}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1-e^2}{e^2} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)_{1/2} = \frac{1}{e}\pm\sqrt{\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{e^2}} = \frac{1}{e}\pm 1 = \frac{1\pm e}{e}$$

TONG

$$\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{\left(1-\frac{x_-}{x}\right)\left(\frac{x_+}{x}-1\right)}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(x_+ + x_-\right) - \pi\sqrt{x_+ x_-}$$

$$\frac{e-e^2+e+e^2}{1-e^2} = \frac{2e}{1-e^2}$$

$$⊛ = \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2}}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{e}{1+e}+\frac{e}{1-e}\right)-\pi\sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}\right] =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{1}{1-e^2}} - \pi$$

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{-\frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

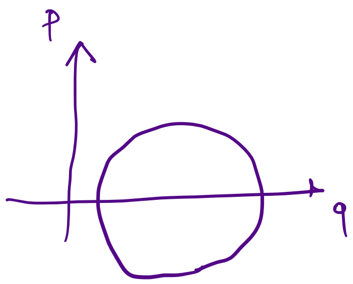
$$\ell = J_\theta + J_\varphi$$

$$= \frac{\pi k}{J_\theta+J_\varphi}\sqrt{-\frac{m}{2E}} - \pi$$

$$\Longleftrightarrow \quad J_r = -\left(J_\theta+J_\varphi\right)+\sqrt{-\frac{mk^2}{2E}}$$

$$\oint_\gamma p\, dq$$

this gives the area inside the curve



$$\oint_{\partial A} p\, dq = \int_A dp \wedge dq$$

Da MATHEMATICA

$$e^2x^2 - e^2 + 2ex - x^2$$
$$e^2x^2\left(1-\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$\circledast = \frac{1}{e(e^2-1)}\Bigg[(e^2-1)\,ex\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2} + e\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{arctg}\left\{\frac{e-(1-e^2)x}{ex\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2}}\right\} + e(1-e^2)\operatorname{arctg}\left\{\frac{x-e}{ex\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e}\right)^2}}\right\}\Bigg]_{\frac{e}{1+e}}^{\frac{e}{1-e}}$$

$$\frac{1}{e(e^2-1)}\Bigg[0 + e\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{arctg}\left\{\frac{-e^2}{e^2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,0^+}\right\} + e(1-e^2)\operatorname{arctg}\left\{\frac{\cancel{e^2}\,1}{\cancel{e^2}\,0^+}\right\}$$

$$1-\frac{e}{x} = 1-\frac{\cancel{e}}{\cancel{e}}(1+e)$$

$$-0 - e\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{arctg}\left\{\frac{e^2}{e^2\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,0^+}\right\} - e(1-e^2)\operatorname{arctg}\left\{\frac{-1}{0^+}\right\}\Bigg]$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{e(e^2-1)}2\left[-e\sqrt{1-e^2} + e\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e^2} - e\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\right]$$

$$\frac{\pi}{\cancel{e}\sqrt{1-e^2}\,\cancel{\sqrt{1-e^2}}}\,\cancel{e}\,\cancel{\sqrt{1-e^2}}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}} - \pi$$

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{-\frac{2El^2}{mk^2}} =$$

$$= \frac{\pi k}{J_\theta + J_\varphi}\sqrt{-\frac{m}{2E}} - \pi$$

$$\Longleftrightarrow \quad J_r = -(J_\theta + J_\varphi) + \sqrt{-\frac{mk^2}{2E}}$$