PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA – A.A. 2021/2022
18 febbraio 2022

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo C

esercizio: Esercizio 1 - 3 esercizi

intervallo di tempo a disposizione: 60 minuti

Domanda 1.3.
Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento seguente:

$$G(s) = 8\,\frac{(1-s)\,(1+s)}{(1+10s)^2}$$

(a) Si traccino i **diagrammi asintotici** di Bode della risposta in frequenza del sistema, utilizzando la carta semi-logaritmica a disposizione.

(b) Sfruttando i diagrammi appena tracciati, disegnare il **diagramma di Nyquist** della risposta in frequenza del sistema, individuando, se possibile, le intersezioni del diagramma di Nyquist con gli assi.

18/02/22

$$G(s) = 8\,\frac{(1-s)(1+s)}{(1+10s)^2}$$

a) due grafici di Bode asintotici

b) diag. polare di $G(j\omega)$

Risposta a)

$g=0 \quad \mu_G = G(0) = 8$

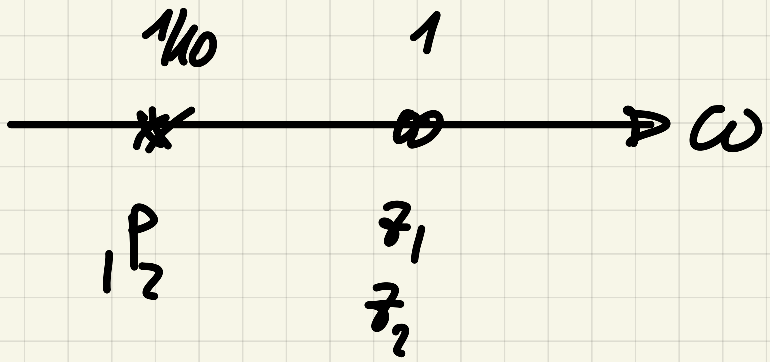
1° tratto $|\cdot|$ $+20\log_{10} 8 \cong 18\,dB$

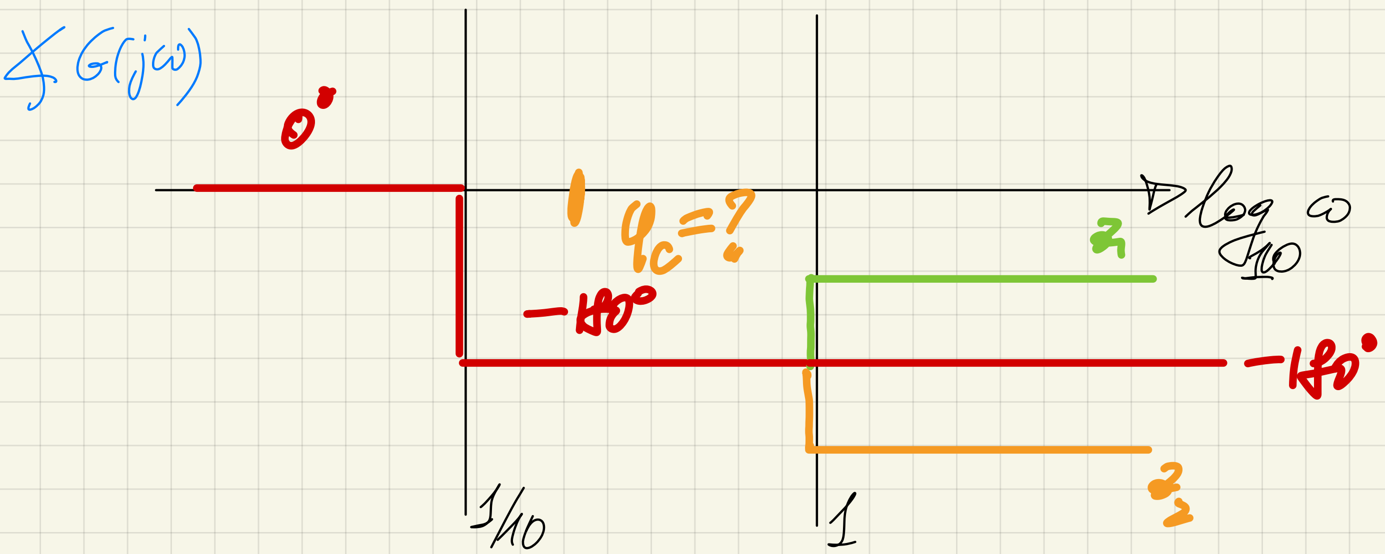
$\measuredangle \ \arg \mu_G = 0°$

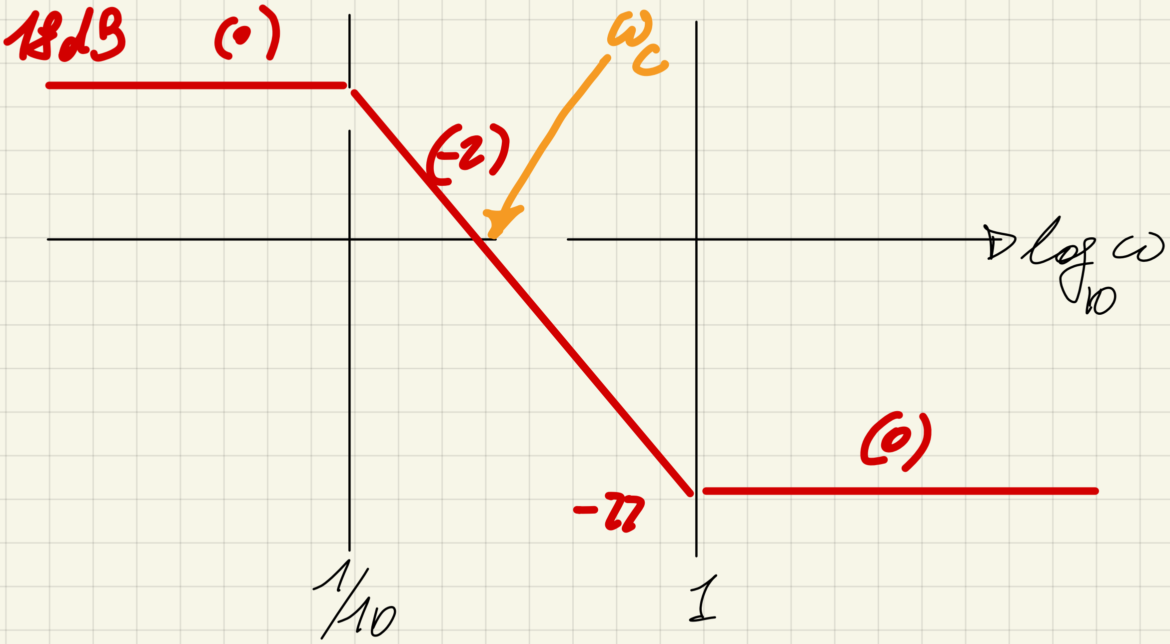
$z_1 = -1 \quad \omega_{z_1} = +1$

$z_2 = +1 \quad \omega_{z_2} = +1$

$p_{1,2} = -\frac{1}{10} \quad \omega_{p_{1,2}} = \frac{1}{10}$







$$y = +18 - 40\left[\cancel{\log_{10} 1} - \log_{10}\frac{1}{10}\right] = +18 - 40\log_{10} 10 = +18 - 40 = -22\,dB$$

$\omega_c \cong 0{,}282$ rad/s

$\omega_c \cong 0{,}276$ rad/s

Dal diagramma asintotico: $\frac{1}{10} < \omega_c < 1$

$$y = +18 - 40\left[\log_{10}\omega - \log_{10}\frac{1}{10}\right] = 0$$

$$+18 - 40\log_{10}(10\omega) = 0$$

$$\log_{10}(10\omega) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

$$10\,\omega = 10^{\frac{9}{20}}$$

$$\omega_c = 10^{\left(\frac{9}{20}-1\right)}$$

$$= 10^{\left(-\frac{11}{20}\right)} \simeq 0,282 \text{ rad/s}$$

A partire dal modulo della risposta in frequenza

ω_c: $|G(j\omega_c)| = 1$

$$\Downarrow$$

$$8\,\frac{|(1-j\omega)(1+j\omega)|}{|(1+10j\omega)^2|} = 1$$

$$\frac{|[1-(j\omega)^2]|}{|1-100\omega^2+20j\omega|} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{|1+\omega^2|}{\sqrt{[1-100\omega^2]^2+400\omega^2}} = \frac{1}{8} \qquad (\,)^2 \cdot 64$$

elevo al quadrato e moltiplico per 64

$$\Downarrow$$

$$64\left(1+\omega^2\right)^2=\left(1-100\omega^2\right)^2+400\omega^2$$

$$\omega^2 \triangleq t$$

$$64t^2+128t+64=1+10000t^2-200t+400t$$

$$\left(10000-64\right)t^2+\left(200-128\right)t+\left(1-64\right)=0$$

$$9936t^2+72t-63=0$$

$$t_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2+9936\cdot 63}}{9936}$$

$$t_1 \simeq 7{,}61\cdot 10^{-2}$$

$$t_2 \simeq -8.33\cdot 10^{-2} \leftarrow <0$$ NON accettabile!

$\omega^2 \triangleq t$

t DEVE essere ≥ 0

$$\omega_c=+\sqrt{t_1}\simeq 0{,}276 \text{ rad/s}$$

NB considero SOLO la soluzione positiva!

NB!

dal diagramma asintotico

$$\omega_{c_{as}} \simeq 0,282 \ rad/s$$

dallo studio del modulo
della risposta in frequenza

$$\omega_c \simeq 0,276 \ rad/s$$

I due valori sono molto vicini: infatti nell'intervallo di pulsazioni in cui c'è ω_c il diagramma asintotico e quello reale del modulo sono molto vicini ← singolarità distanti tra loro

Questa considerazione può avvalorare l'utilizzo della pulsazione $\omega_{c_{as}}$ ottenuta dal diagramma asintotico, senza determinare ω_c direttamente dall'equazione che utilizza il modulo della risposta in frequenza.

Determinazione di

$$\varphi_c = \arg G(j\omega_c)$$

$$\varphi_c = \underbrace{\arg 8}_{0^\circ} + \underbrace{\arg(1+j\omega_c)}_{\text{I quadrante}} + \underbrace{\arg(1-j\omega_c)}_{\text{IV quadrante}} + \underbrace{-2\arg(1+10j\omega_c)}_{\text{I quadrante}}$$

$$\varphi_c = 0^\circ + \cancel{\operatorname{arctg}(\omega_c)} + \cancel{\operatorname{arctg}(-\omega_c)} + $$

$$\cancel{-\operatorname{arctg}(\omega_c)}$$

$$-2\operatorname{arctg}(10\omega_c)$$

$$= 0^\circ - 2\operatorname{arctg}(10\omega_c) \simeq 0^\circ - 140^\circ$$

$$\varphi_c \simeq -140^\circ$$

Di conseguenza: $\varphi_m = \varphi_c - (-180^\circ)$

$$\simeq -140^\circ + 180^\circ = +40^\circ$$

Quanto vale il margine di fase? $k_\mu = ?$

Dai diagrammi asintotici tracciati in precedenza sappiamo che:

$$\left.\begin{array}{l} \arg G(j\omega) \longrightarrow -180^\circ \\ \quad \omega \to +\infty \\ |G(j\omega)| \longrightarrow -22dB \end{array}\right\}$$

Allora il diagramma polare della risposta in frequenza raggiunge il semiasse reale negativo per $\omega \to +\infty$ $\Rightarrow$ è possibile valutare k_m:

$$k_m^{dB} = +22dB \longleftrightarrow k_m \simeq 12.6$$

per $\omega \to +\infty$

Lo si verifichi in Matlab con questi comandi:

```
s = tf('s');
Gs = 8*(1-s) *(1+s) /(1+10*s) ^2;
margin( Gs )
```

I comandi vanno inseriti nella "Command Window" oppure salvati in uno script

Risposta (b)

Diagramma polare della risposta in frequenza

$$G(j\omega) = 8\,\frac{(1-j\omega)(1+j\omega)}{(1+10j\omega)^2} =$$

$$= 8\cdot\frac{1+\omega^2}{(1-100\omega^2)+20j\omega}$$

Ricordando che

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

si ottiene

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}_G(\omega) + j\,\mathrm{Im}_G(\omega) =$$

$$= 8\cdot\frac{(1+\omega^2)(1-100\omega^2)}{(1-100\omega^2)^2+400\omega^2} +$$

$$-160\,j\,\frac{\omega\,(1+\omega^2)}{(1-100\,\omega^2)^2+400\omega^2}$$

A questo punto

gr. Bode

(•) analisi per $\omega \to 0^+$

$$G(j\omega) \xrightarrow[\omega \to 0^+]{} +\infty \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}() \xrightarrow[\omega \to 0^+]{} +\infty \\ \mathrm{Im}() \xrightarrow[\omega \to 0^+]{} 0^- \end{cases}$$

(•) analisi per $\omega \to +\infty$

dai diagrammi di Bode

$$|G(j\omega)| \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 2/25$$

$$\angle G(j\omega) \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} -180^\circ$$

$$\mathrm{Im}() \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 0^-$$

$$\mathrm{Re}() \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} -\frac{8\omega^4}{100\omega^4} = -\frac{2}{25}$$

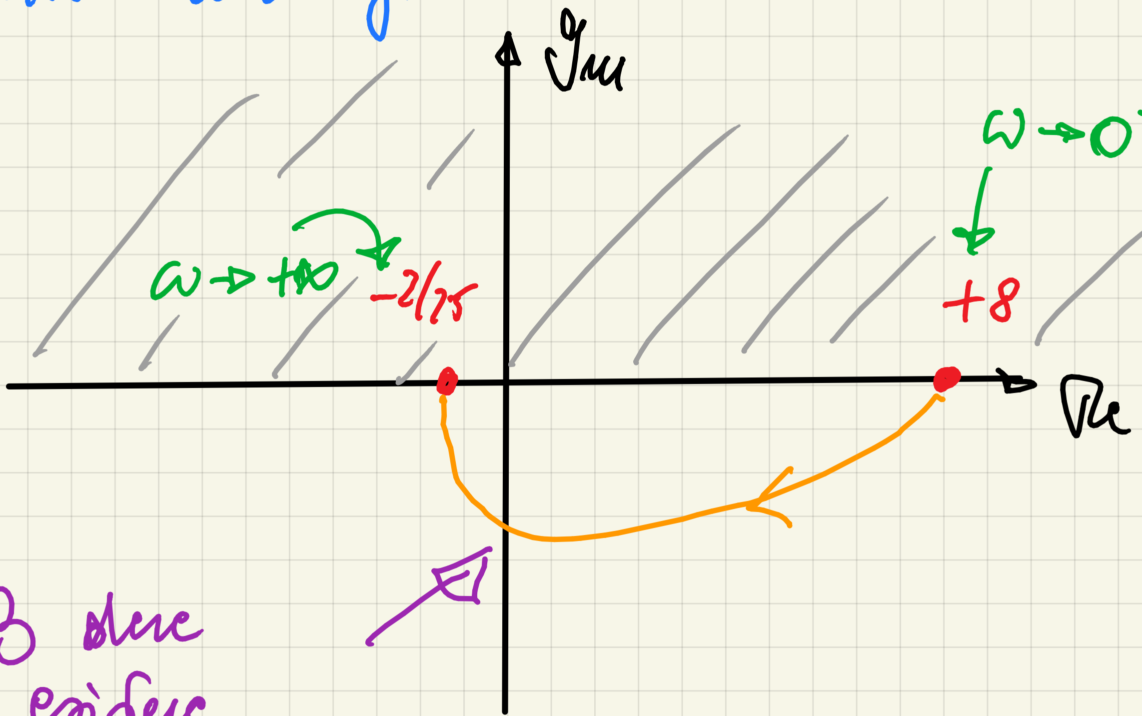
(•) quadrante occupato:

dai diagrammi di Bode

$\underline{\mathrm{III}}$ e $\underline{\mathrm{IV}}$ quadrante

$\angle \in [-180^\circ ; 0^\circ]$

1ª bozza di diagramma



NB deve esistere almeno una intersezione con l'asse Im!

(•) intersezioni con gli assi

asse immaginario ← $Re(\ ) = 0$

$$(\cancel{1+\omega^2})(1-100\omega^2) = 0$$

$>0\ \forall\omega$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2 = \frac{1}{100}$$

NB considero solo $\omega > 0$ → $\omega = +\frac{1}{10}$

↓

sostituisco in $Re_G(\cdot)$ e $Im_G(\cdot)$ e trovo:

$$\omega = \frac{1}{10} \rightarrow \begin{array}{l} Re(\cdot) = 0 \\ Im(\ ) = -\ 10/25 \end{array}$$

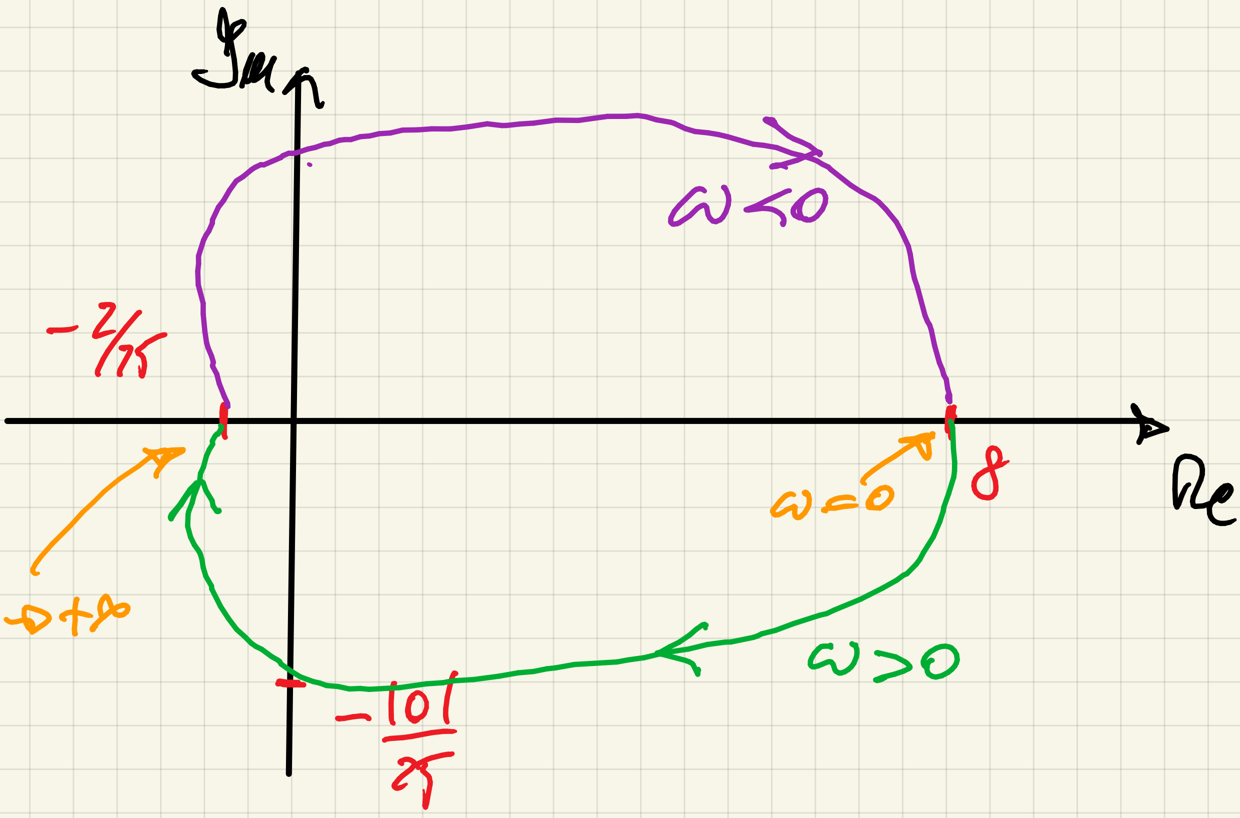
(•) intersezioni con gli assi

asse reale $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}_G(\cdot) = 0$

$$-160\,\omega\,(1+\omega^2) = 0$$

$\omega = 0$ $\leftarrow$ unica soluzione per ω finito

In definitiva il diagramma di Nyquist è



PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA – A.A. 2021/2022
18 febbraio 2022

Nome e Cognome:
gruppo: Gruppo B
esercizio: Esercizio 1 - 3 esercizi
intervallo di tempo a disposizione: 60 minuti

Domanda 1.3.
Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento seguente:

$$G(s) = 12\,\frac{(1+5\,s)}{s\,(1+0.5\,s)}$$

(a) Si traccino i **diagrammi asintotici** di Bode della risposta in frequenza del sistema, utilizzando la carta semi-logaritmica a disposizione.

(b) Sfruttando i diagrammi appena tracciati, disegnare il **diagramma di Nyquist** della risposta in frequenza del sistema, individuando, se possibile, le intersezioni del diagramma di Nyquist con gli assi.

Risposta (a) zeri, poli e costante di guadagno

$g = +1$ $\quad p_1 = 0$ è "sistema di tipo 1" se chiuso in semplice ciclo di retroazione negativa

$\mu = 12 \leftarrow$ costante di guadagno

$p_2 = -2 \longleftrightarrow \omega_{p_2} = +2$

$z_1 = -\frac{1}{5} \longleftrightarrow \omega_{z_1} = +\frac{1}{5} = +0{,}2$

Riassumendo: 2 poli, 1 zero

Le pulsazioni caratteristiche individuate [in corrispondenza alle quali ci sono i cambi di pendenza nel diagramma asintotico del modulo ed i salti in quello della fase della risposta in frequenza] sono queste:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0{,}2 & & 2 \\ \omega_{P_1} & & \omega_{z_1} & & \omega_{P_2} \end{array} \quad \rightarrow \omega$$

1° tratto della spezzata del modulo asintotico

$\mu_G = 12$ $\Longrightarrow$ retta a pendenza $-20\,dB/\text{decade}$
$P_1 = 0$ che passa per μ_G^{dB} per $\omega = 1$

$$\mu_G^{dB} = 20\log_{10} 12 \simeq 21{,}6\,dB$$

NB $\omega = 1$ è esterna all'intervallo in cui si traccia il 1° tratto della spezzata: infatti

$$\omega \in [0\ ;\ +0{,}2]$$

Ma allora se $\omega = 1 \longleftrightarrow \mu_{dB} = 21{,}6\,dB$

per $\omega = 0{,}2 \longrightarrow \mu_{dB} = ?$

Equazione della retta per $\omega = 1$

$$y = +21{,}6 - 20\left[\log_{10}\omega - \underbrace{\log_{10} 1}_{\to\, \emptyset}\right]$$

$\omega = 0{,}2$

$$= +21{,}6 - 20\log_{10}(0{,}2) \simeq 35{,}6\ dB$$

Adesso ho il 1° pto della spezzata:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 0{,}2 \\ M_{dB} = 35{,}6\ dB \end{array}\right\}$$ per questo pto passa retta con pendenza $-20dB/decade$

per es. per $\omega = 0{,}02$ [cioè una decade prima di ω_{t_1}] il modulo asintotico vale

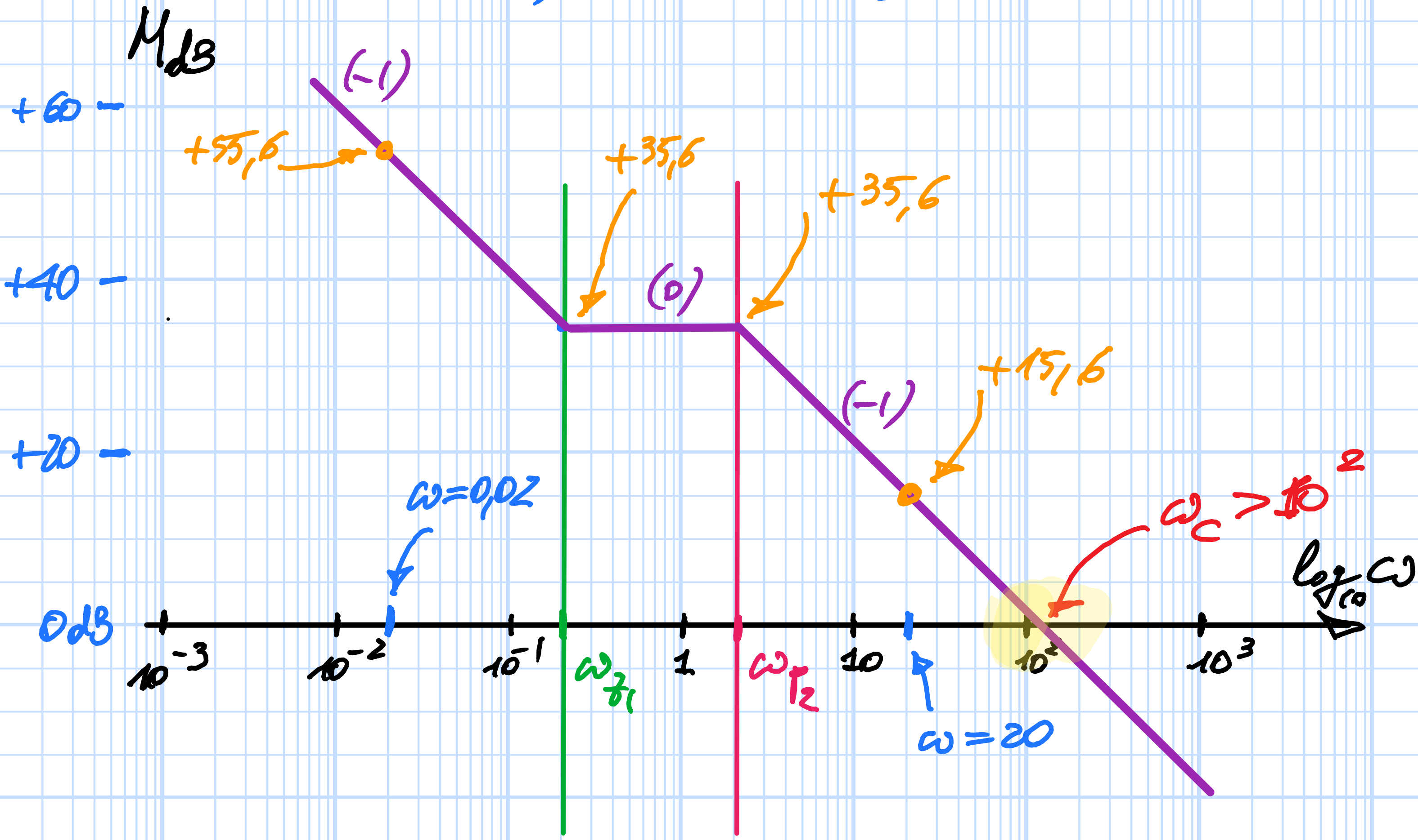
$$M_{dB}(0{,}02) = +35{,}6 + 20 = +55{,}6\ dB$$

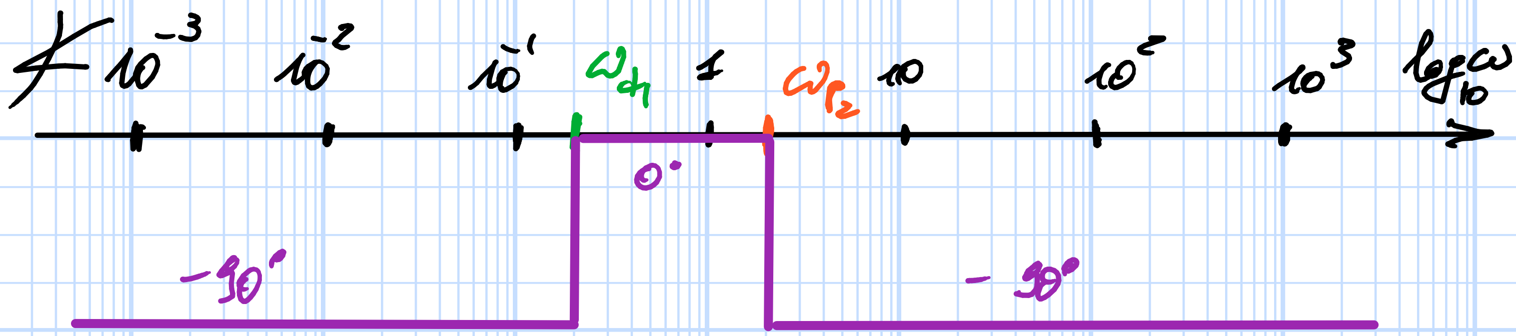
A questo punto è semplice proseguire col resto della spezzata e il grafico del modulo →

$$G(s) = 12\,\frac{(1+5s)}{s\,(1+0{,}5s)}$$

$\omega_{p_1} = 0 \qquad \omega_{z_1} = +0{,}2$

$\omega_{p_2} = +2$





Dai grafici $\omega_c \in \,]100 ; 200[$

stima di ω_c dal diagramma asintotico

$$y = 35{,}6 - 20\left[\log_{10}(\omega) - \log_{10}(2)\right] = 0$$

$$35{,}6 - 20\log_{10}\omega + \underbrace{20\log_{10} 2}_{\simeq +6{,}02\,dB} = 0$$

$$41{,}02 - 20\log_{10}\omega = 0$$

$$\log_{10}\omega = \frac{41{,}62}{20} \simeq 2{,}08$$

$$\omega_c \simeq 120{,}23 \text{ rad/s} \quad ///$$

Risolvo analiticamente, imponendo $|G(j\omega_c)| = 1$

$$12 \cdot \frac{|1 + j5\omega_c|}{|j\omega_c| \cdot \left|1 + j\frac{\omega_c}{2}\right|} = 1$$

Con $\omega_c > 0$

$$12 \cdot \frac{\sqrt{1 + 25\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{1 + \omega_c^2/4}} = 1$$

$$12\sqrt{1+25\omega_c^2} = \omega_c\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{4}} \quad / ()^2$$

$$144\left(1+25\omega_c^2\right) = \omega_c^2\left(1+\frac{\omega_c^2}{4}\right)$$

$$\omega_c^2 \triangleq t \qquad 144 + 25\cdot 144\, t = t\left(1+\frac{t}{4}\right)$$

$$t^2 - 14336\,t - 576 = 0$$

$$t_{12} = 7168 \pm \sqrt{7168^2 + 576}$$

$t_1 \simeq -0{,}04 \leftarrow$ non accettabile <0 !

$t_2 \simeq 14336{,}04$

$$\omega_c = +\sqrt{t_2} \simeq 119{,}983$$

cfr. stima ottenuta dai diagr. asintotici

$\arg G(j\omega_c) = ?$

dal diagramma asintotico

$$\varphi_c = \arg G(j\omega_c) \simeq -90^\circ$$

per via analitica

$$\arg G(j\omega_c) = \arg\left[\frac{12(1+5j\omega_c)}{j\omega_c\left(1+j\,\frac{\omega_c}{2}\right)}\right] =$$

$$= \underbrace{\arg(12)}_{0^\circ} - \underbrace{\arg(j\omega_c)}_{90^\circ} + \arg(1+5j\omega_c) + - \arg\left(1+j\,\frac{\omega_c}{2}\right) =$$

$\omega_c \simeq 119{,}983$

$$\simeq -90^\circ + 89{,}904 - 89{,}045 \simeq -89{,}141$$

$$\varphi_c \rightarrow -89^\circ\, 8'$$

$$\simeq -89^\circ$$

Margine di guadagno?

$k_M = ?$ ← determinarlo per esercizio

Risposta (b)

diagramma polare

$$G(j\omega) = \frac{12}{j\omega} \frac{1+5j\omega}{1+j\frac{\omega}{2}} =$$

$$= 12 \cdot \frac{1+5j\omega}{-\frac{\omega^2}{2}+j\omega} =$$

separo parte reale ed immaginaria

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$Re(\omega) = 12 \cdot 18 \frac{1}{\omega^2+4} = \frac{216}{\omega^2+4}$$

$>0 \quad \forall \omega > 0$

$$Im(\omega) = -\frac{4}{\omega}\left(\frac{1+\frac{5}{2}\omega^2}{\omega^2+4}\right)$$

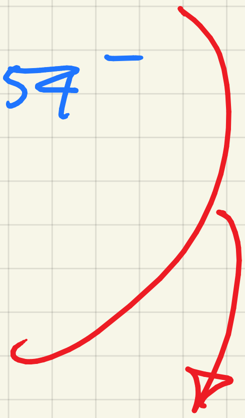
$<0 \quad \forall \omega > 0$

Tracciamento del diagramma polare

(•) analisi per $\omega \to 0^+$

$$\mathrm{Re}() \to \frac{216}{4}^- = 54^-$$

$$\mathrm{Im}() \to -\infty$$



asintoto verticale

(•) analisi per $\omega \to +\infty$

$$\mathrm{Re}() \to 0^+$$

$$\mathrm{Im}() \to 0^-$$

(•) quadrante occupato

$$-90^\circ \leq \arg G(j\omega) \leq 0^\circ$$

solo $\overline{\underline{IV}}$ quadrante

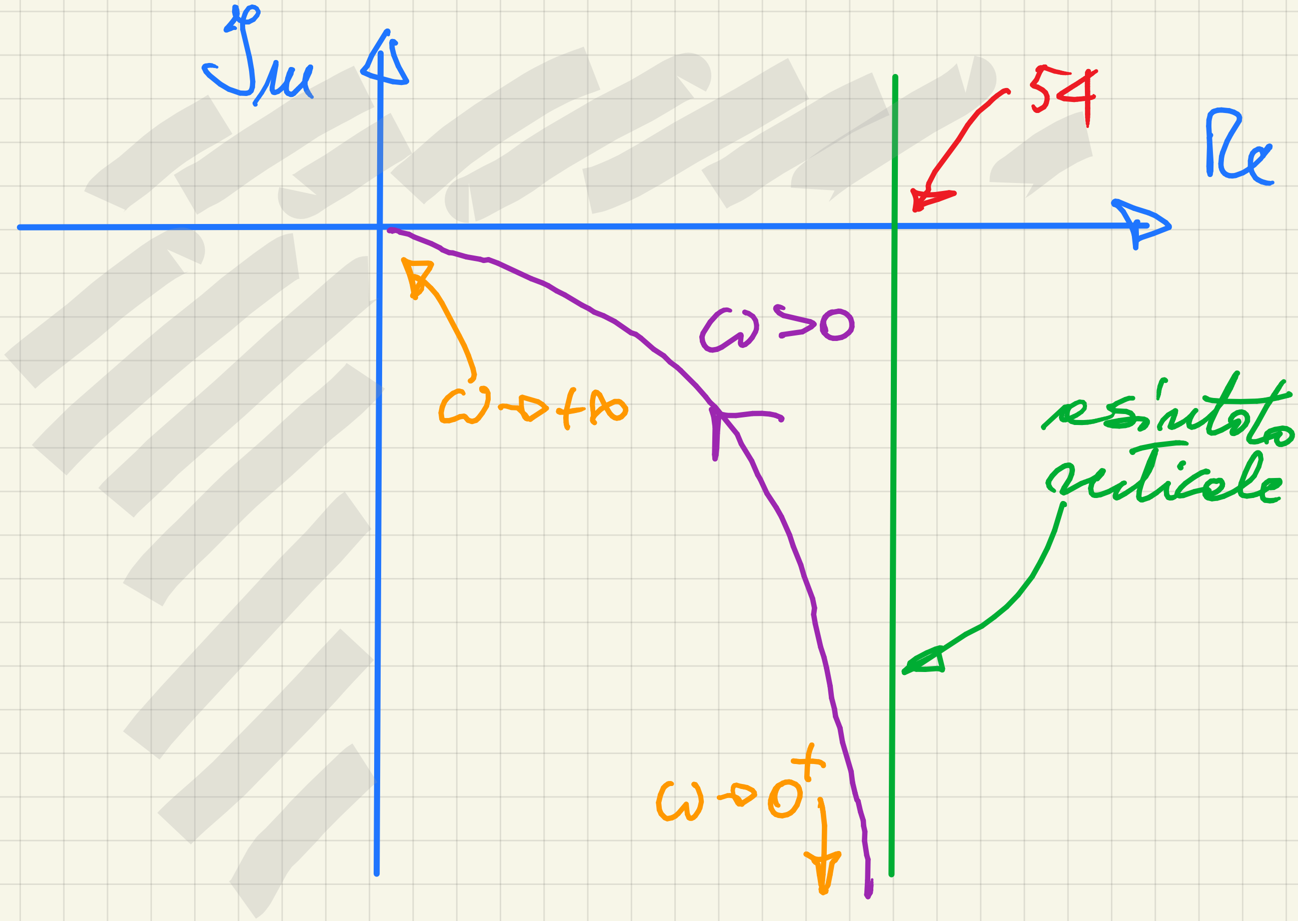
(•) intersezioni con gli assi

$$\mathrm{Re}(\,) = 0 \iff \frac{216}{\omega^2+4} = 0 \quad \nexists\, \omega$$

$$\mathrm{Im}(\,) = 0 \iff -\frac{4}{\omega}\,\frac{1+\frac{3}{2}\omega^2}{\omega^2+4} = 0$$

$$\nexists\, \omega$$

NON interseca MAI gli assi!



Tracciare il diagramma di Nyquist