

RINORMALIZZAZIONE DELLA QED [S.19.1]

Analogamente a quanto fatto per la teoria $\lambda\phi^4$, cominciamo dalla Lagrangiana della QED in termini dei campi ed accoppiamenti "bare"

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (d_\mu A_\nu^\circ - d_\nu A_\mu^\circ)^2 + \bar{\psi}^\circ (i\not{D} - e_0 A^\circ - m_0) \psi^\circ + \int^\circ$$

↑
energia
del vuoto

Ci sono 5 oggetti bare: $A_\mu^\circ, \psi^\circ, e_0, m_0, \int^\circ$

ed abbiamo visto che ci sono 4

funzioni di Green con un grado di div. sup. ≥ 0 :

 $D=4$
 Λ^4

 $D=2$
 $(p_0^2 + p_1^2) \log \Lambda$

 $D=1$
 $A \not{p} \log \Lambda + B m \log \Lambda$
2 parametri indip.

 $D=0$
 $\log \Lambda$

Possiamo quindi riassorbire ciascuna divergenza in un parametro bare.

Da qui in poi trascuriamo l'energia di vuoto, il cui effetto viene cancellato da $Z[0]^{-1}$.

Introduciamo i **CONTROTERMINI** definendo
gli oggetti **RINORMALIZZATI**

CAMPI $\psi^0 = z_2^{1/2} \psi^R$, $A_\mu^0 = z_3^{1/2} A_\mu^R$

MASSA $m_0 = z_m m_R$

ACCOUPLAMENTO $e_0 = z_e e_R$

La Lagrangiana diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} z_3 (d_\mu A_\nu^R - d_\nu A_\mu^R)^2 + \\ & + i z_2 \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R - z_2 z_m m_R \bar{\psi}_R \psi_R \\ & - e_R \underbrace{z_e z_2 z_3^{1/2}} \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R \\ & z_e z_2 z_3^{1/2} \equiv z_1 \end{aligned}$$

Da qui in avanti
non scriveremo "R"
per le quantità
rinormalizzate.

Espandiamo questi z
attorno ad 1 introducendo i controtermini

$$z_1 \equiv 1 + \delta_1, \quad z_2 \equiv 1 + \delta_2, \quad z_3 \equiv 1 + \delta_3, \quad z_e \equiv 1 + \delta_e, \quad z_m \equiv 1 + \delta_m$$

I controtermini sono fatti: $\delta \sim \mathcal{O}(e^2)$.

$$z_1 \equiv z_e z_2 z_3^{1/2} \Rightarrow \delta_e = \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_3 + \mathcal{O}(e^4)$$

Nota: è anche possibile definire $m_0 z_2 \equiv m_R z_m$ piuttosto che $m_0 = m_R z_m$.
 Per $\lambda\phi^4$ avevamo fatto così, però è più conveniente questa
 modalità mostrata qui.

Abbiamo quindi la Lagrangiana per la teoria delle
 perturbazioni rinormalizzata:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} \not{A} \psi$$

$$- \frac{1}{4} \int_3 \bar{F}_{\mu\nu}^2 + i \int_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - (\int_m + \int_2) m \bar{\psi} \psi - e \int_1 \bar{\psi} \not{A} \psi$$

Le regole di Feynman della teoria sono:

TEORIA RINORMALIZZATA

$$\text{wavy line} = \frac{-i(g_{\mu\nu} - (1-\xi)P_\mu P_\nu)}{p^2 - i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \text{arrow} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{vertex} = -ie\gamma_\mu$$

CONTROTERMINI:

$$\text{wavy loop} = -i \int_3 (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$$

$$\text{arrow loop} = i(\not{p} \int_2 - (\int_m + \int_2)m)$$

$$\text{vertex loop} = -ie \int_1 \gamma^\mu$$

Conseguenze di Ward-Takahashi

L'identità di Ward-Takahashi implica

$$\boxed{z_1 = z_2}$$

Dato $z_e z_2 z_3^{1/2} \equiv z_1$ e $e_0 = z_e e_R$

$$\Rightarrow \boxed{e_R = z_3^{1/2} e_0}$$

La rinormalizzazione della carica elettrica e^- è determinata solamente dalla rinormalizzazione del campo elettromagnetico.

Questo implica che il rapporto tra le cariche di diverse particelle (e.g. quark, elettroni, protone, ...) non viene modificato da correzioni radiative:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} z_3 F_{\mu\nu}^2 + i z_{2e} \bar{e} \not{\partial} e - e_R z_{1e} \bar{e} \not{A} e \\ &\quad + i z_{2q} \bar{q} \not{\partial} q + Q_q e_R z_{1q} \bar{q} \not{A} q \end{aligned}$$

Q_q : carica del quark "q"

$$\begin{aligned} &\quad z_{1e} = z_{2e} \\ &\quad z_{1q} = z_{2q} \end{aligned}$$
$$= -\frac{1}{4} z_3 F_{\mu\nu}^2 + z_{2e} \bar{e} (i\not{\partial} - e_R \not{A}) e + z_{2q} \bar{q} (i\not{\partial} + Q_q e_R \not{A}) q$$

\Rightarrow La carica dell'elettrone e del protone rimangono esattamente uguali ed opposte (quindi atomi rimangono neutri) nonostante abbiano interazioni molto diverse tra loro.

Possiamo convincerci che $Z_1 = Z_2$ riscalandolo $A_\mu \rightarrow \frac{1}{e_r} A_\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e_r^2 Z_3} F_{\mu\nu}^2 + Z_{2e} \bar{e} \left(i \not{\partial} - \frac{Z_{1e}}{Z_{2e}} A \right) e + Z_{2q} \bar{q} \left(i \not{\partial} + Q_q \frac{Z_{1q}}{Z_{2q}} A \right) q$$

L'invarianza di gauge: $q \rightarrow e^{iQ_q \int A} q$, $e \rightarrow e^{-i \int A} e$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e_r} \partial_\mu \alpha$
 dipende dalle cariche dei campi $Q_i = -1, Q_q$ ma non da e_r .

Questa invarianza è indipendente dalle correzioni perturbative, quindi deve essere preservata come al livello classico.

Cio è possibile solo se

$$Z_{1e} = Z_{2e} \quad \& \quad Z_{1q} = Z_{2q}$$

Dimostrazione

Ward-Takahashi :

$$i p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = e M_0(q_1 + p, q_2) - e M_0(q_1, q_2 - p)$$

dove:

$$\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i p x} e^{i q_1 x_1} e^{-i q_2 x_2} \langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \equiv M^\mu(p, q_1, q_2)$$

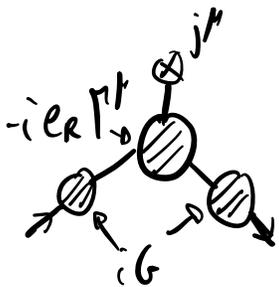
$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i q_1 x_1} e^{-i q_2 x_2} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \equiv M_0(q_1, q_2)$$

Abbiamo anche:

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-i q(x_1 - x_2)} i G(q) \quad \leftarrow \text{propagatore}$$

$$\Rightarrow p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p + q_1 - q_2) e [G(p + q_1) - G(q_1)] \quad (*)$$

Definiamo anche la correzione al vertice come la somma di diagrammi 1PI con le gambe esterne amputate



Riscrivo M^μ come:

$$i M^\mu(p, q_1, q_2) = i G(p + q_1) (\cancel{i e k_\mu}) M^\mu(p, q_1, q_2) (2\pi)^4 \delta^4(p + q_1 - q_2) i G(q_1)$$

Sostituendo in (*) e moltiplicando per $G^{-1}(p + q_1) (\cdot) G^{-1}(q_1)$ ho:

$$\Rightarrow p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = G(p + q_1)^{-1} - G(q_1)^{-1}$$

Il propagatore è dato da $iG(\not{q}) = \frac{i}{\not{q} - m_R + \Sigma(\not{q}) + i\epsilon}$

$$G(\not{q})^{-1} = \not{q} - m_R + \Sigma(\not{q})$$

Prendiamo solamente le parti divergenti da ambo i lati, ovvero i controtermini Z_i


$$-i e_R \gamma^\mu \Big|_{\text{div}} = -i e_R \delta_1 \gamma^\mu$$


$$i \Sigma(\not{q}) \Big|_{\text{div}} = i (\not{q} \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2) m)$$

$$\Rightarrow \delta_1 \not{q} = \not{q} \delta_2 \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \boxed{Z_1 = Z_2}$$

□

SELF-ENERGY DEL FOTONE [S.16.2-3, S.19.2.1, PS.7.5]

Vogliamo calcolare $\langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} iG^{\mu\nu}(p)$

Calcoliamo i contributi 1PI: $\overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{1PI} \overset{\nu}{\text{---}} \equiv i\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p)$

Per invarianza di Lorentz:

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = \Pi_1(p^2, m^2) p^2 g^{\mu\nu} + \Pi_2(p^2, m^2) p^\mu p^\nu \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{regolare in} \\ p^2=0 \end{array}$$

L'identità di Ward implica $p_\mu \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = 0$

$$\Rightarrow \Pi_1 = -\Pi_2 \equiv \tilde{\Pi}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{\Pi}(p^2)$$

Nella gauge di Feynman $\xi=1$. [PS.7.5]

La funzione a 2 punti connessa è data da

$$\overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{\text{---}} \overset{\nu}{\text{---}} = \text{---} + \overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{1PI} \overset{\nu}{\text{---}} + \overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{\text{---}} \textcircled{1PI} \textcircled{\text{---}} \overset{\nu}{\text{---}} + \dots$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} [i(p^2 g_{\sigma\rho} - p_\sigma p_\rho) \tilde{\Pi}(p^2)] \frac{-ig_{\rho\nu}}{p^2} + \dots =$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} \Delta_\nu^{\rho} \tilde{\Pi}(p^2) + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} \Delta_\sigma^{\rho} \Delta_\nu^{\tau} (\tilde{\Pi}(p^2))^2 + \dots$$

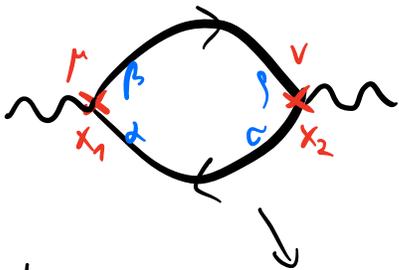
ORIGIN OF THE (-1) FOR CLOSED FERMIONIC LOOPS

- When a closed fermionic loop is present in the diagram, a factor of (-1) must be added as Feynman Rule.

This is a consequence of the anticommuting nature of fermionic fields:

Interaction Lagrangian: $\mathcal{L}_I = -e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$

$$Z[\bar{M}, M, \mathcal{J}] \propto e^{-ie \int d^4x \left(\underbrace{-i \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}_\mu(x)}}_{\phi_{\mu x}} \right) \left(\underbrace{i \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu(x)}}_{i \delta_x^\alpha} \right) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\underbrace{-i \frac{\delta}{\delta \bar{M}_\nu(x)}}_{-i \delta_y^\beta} \right)} e^{-\langle \bar{M}_x S_{xy} M_y \rangle - \frac{i}{2} \langle \sum_\mu \bar{\Psi}^\mu \mathcal{J}^\mu \Psi \rangle}$$



← This Green function is one of the terms obtained by expanding $e^{i\langle \mathcal{L}_I \rangle}$ to second order

Questo diagramma

sarà proporzionale a $\propto e^2 \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu \sum_{12}^{\beta\beta} \sum_{21}^{\alpha\alpha} \Rightarrow$ la Z deriva da:

$$\begin{aligned} Z &\supset (-ie)^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu \left(\int_{x_1}^\alpha \int_{x_1}^\beta \right) \left(\int_{x_2}^\gamma \int_{x_2}^\delta \right) \left(\bar{M}_x S_{xy} M_y \right) \left(\bar{M}_z S_{zw} M_w \right) e^{-\frac{i}{2} \langle \sum_\mu \bar{\Psi}^\mu \mathcal{J}^\mu \Psi \rangle} \\ &= e^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu (-1) \left(\int_{x_1}^\alpha \int_{x_1}^\beta \right) \left(\bar{M}_x S_{x_2}^\beta \right) \left(S_{2w}^\delta M_w \right) e^{-\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} \\ &= e^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu (-1) \sum_{12}^{\beta\beta} \sum_{21}^{\alpha\alpha} e^{-\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} = \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} e^{-\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} e^2 (-1) \text{Tr}[\gamma^\mu S_{12} \gamma^\nu S_{21}] \end{aligned}$$

\Rightarrow Ho un (-1) rispetto ad un analogo loop bosonico

Calcolo della self-energy del fotone a 1-loop

[PS.7.5]

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{diagramma} + \text{diagramma} = i\Pi^{\mu\nu}(p)$$

The diagram shows a fermion loop with external photon lines. The loop momenta are labeled k and $k-p$. The external photon momenta are p and p . The diagram is equal to $-i\int_3(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$.

Il diagramma di loop è dato da:

$$i\Pi^{\mu\nu} = (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie \gamma_\mu^{\alpha\beta}) i \frac{(k-p+m)^{\beta\gamma}}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \gamma_\nu^{\gamma\delta}) i \frac{(k+m)^{\delta\alpha}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Loop fermionico
indici spinoriali

$$= -(-ie)^2 i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu (k-p+m) \gamma_\nu (k+m)]}{[(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Gli indici spinoriali si contraggono in una traccia.

Usando

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu})$$

otteniamo:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu (k-p+m) \gamma_\nu (k+m)] = 4[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]$$

$$\Rightarrow i\Pi^{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

$$= -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(k - p(1-x))^2 + \underbrace{p^2 x(1-x)}_{-\Delta} - m^2 + i\epsilon]^2}$$

Facciamo lo shift $k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu(1-x)$. Termini lineari in k al numeratore 0.

$$= -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[-k^2 + x(1-x)p^2 + m^2] + (\text{termini } p^\mu p^\nu)}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

$\frac{2}{d} k^2 g^{\mu\nu} = -\frac{2}{d} \delta^{\mu\nu} k_\sigma^2$

Regolarizziamo in $d=4-\epsilon$:

$$[A_\mu] = \frac{d-2}{2} \quad [\psi] = \frac{d-1}{2} \quad \rightarrow [e_\mu] + 2[\psi] + [A_\mu] = d$$

$$\rightarrow [e_\mu] = d - d + 1 - \frac{d-2}{2} = -\frac{d}{2} + 2 = \frac{4-d}{2}$$

definiamo $e_\mu = e \mu^{\frac{4-d}{2}}$ tale che $[e] = 0$

Inoltre: $\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^\mu k^\nu f(k^2, \Delta) = g^{\mu\nu} G(\Delta)$ dato che Δ è scalare

Contrando con $g_{\mu\nu}$:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 f(k^2, \Delta) = d G(\Delta) \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu} G(\Delta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} k^2 f(k^2, \Delta)$$

Oppure possiamo sostituire $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{d} k^2 g^{\mu\nu}$

Effettuando la rotazione di Wick $k^0 \rightarrow i k_E^0$, $k^2 \rightarrow -k_E^2$:

$$\Rightarrow i\tilde{\Pi}_2^\mu(p) = -4ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} [k_E^2 (1 - \frac{2}{d}) + x(1-x)p^2 + m^2] + \dots}{(k_E^2 + \Delta)^2}$$

Facendo l'integrale di loop e riprendendo i fermioni $\propto p^\mu p^\nu$:

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(p) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \mu^{4-d} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{1}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

$$= (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{\Pi}_2(p^2)$$

Reintroducendo anche il controtermine:

$$\xrightarrow{d \rightarrow 4-\varepsilon} \Pi(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) - \delta_3$$

Integrali di loop comuni

[S.App B, PS.App A]

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} - n}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} + 1 - n}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} + 2 - n}$$

CONDIZIONE DI RINORMALIZZAZIONE ON-SHELL (MOH):

Possiamo fissare la condizione di rinormalizzazione

$$\Pi(0) \equiv 0.$$

$$\Leftrightarrow \Pi(0) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \int_3 \equiv 0 \quad \int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_3^{\text{MOH}} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right)$$

$$\Pi^{\text{MOH}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)$$

RINORMALIZZAZIONE $\overline{\text{MS}}$:

In alternativa, il contotermine può essere fissato nello schema $\overline{\text{MS}}$:

$$\int_3^{\overline{\text{MS}}} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\Pi^{\overline{\text{MS}}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)$$

dove ora:
 $e = e(\mu)$

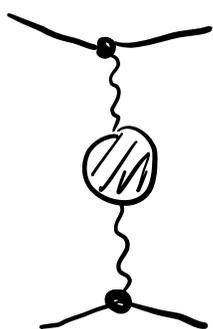
CONSEGUENZE FISICHE

[PS.7.5, S.16.3]

POTENZIALE ELETTROMAGNETICO

$$\Pi^{\text{non}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{m^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right)$$

Il potenziale $V(r)$ che descrive l'interazione fra due cariche e^- è dato da ($p^2 = -|\vec{q}|^2$)



$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 (1 - \Pi^{\text{non}}(-\vec{q}^2))}$$

Espandendo $\Pi(-|\vec{q}|^2)$ per $|\vec{q}|^2 \ll m^2$:

$$V(\vec{x}) = -\frac{e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \int^3(\vec{x})$$

Questo è uno dei contributi al Lamb-shift dei livelli dell'atomo di idrogeno.

PARTE IMMAGINARIA - TEOREMA OTTICO

Per processi con $p^2 > 0$, il logaritmo ha un branch cut per $m^2 - p^2 x(1-x) < 0$, il che è possibile a partire da $p^2 \geq 4m^2$.

Questa equivale alla soglia sopra la quale e^+e^- nel loop possono andare on-shell.

Dato $\text{Im} [\log(-x - i\epsilon)] = -\pi$

Avremo:

$$\begin{aligned} \text{Im} [\tilde{\Pi}^{\text{Horn}}(p^2 - i\epsilon)] &= -\frac{e^2}{2\pi^2} (-\pi) \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta} dx x(1-x) \\ &= +\frac{e^2}{12\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right) \end{aligned}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}$$

La sezione d'urto totale $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ è data da:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi d^2}{3 C_{\text{cm}}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{cm}}^2}} \left(1 + \frac{2m_f^2}{C_{\text{cm}}^2}\right)$$

TEOREMA OTTICO

$$\text{Im} \left[\mathcal{M} \left(\begin{array}{c} e^+ \\ e^- \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} p \\ p^2 = C_{\text{cm}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} e^+ \\ e^- \end{array} \right) \right] = 2 C_{\text{cm}} |\vec{p}| \sum_X \sigma(e^+e^- \rightarrow X)$$

La parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti è proporzionale alla sezione d'urto totale.

PROBLEMA DEI GRANDI LOGARITMI IN QED

Abbiamo visto che, per l'identità di Ward, $\Pi(q^2)$, ovvero Z_3 , rinormalizza la carica elettrica.

Prendiamo il limite $Q^2 = -p^2 \gg m^2$ da $\tilde{\Pi}^{\text{hom}}(p^2)$:

$$\tilde{V}(p^2) \equiv \frac{e^2}{p^2(1 - \tilde{\Pi}^{\text{hom}}(p^2))} \quad \text{dove: } \tilde{\Pi}(p^2) \approx \frac{e^2}{12\pi^2} \left(\log \frac{-p^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right)$$

$$\approx - \frac{e^2}{Q^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2} \right)} \equiv - \frac{e_{\text{eff}}^2(Q^2)}{Q^2}$$

dove $A \equiv e^{5/3}$

$$e_{\text{eff}}^2(Q^2) \equiv \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2}} \approx e^2 \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2} + \dots \right)$$

Versione in cui i LEADING LOG sono risommati

Qui i leading log non sono risommati

$e_{\text{eff}}^2(Q)$ è la **CARICA ELETTRICA EFFETTIVA** in funzione del momento rilevante al processo che si studia.

Definiamo

$$\alpha_{\text{eff}}(Q) \equiv \frac{e_{\text{eff}}^2(Q)}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{Q^2}{Am^2}}$$

Dove $\alpha \approx \frac{1}{137}$

Come per $\lambda\phi^4$, la carica elettrica cresce per alte energie e ha un polo per $Q \approx 10^{28}$ eV

POLO DI LANDAU.

Questa carica effettiva corrisponde al RUNNING COUPLING, nel caso specifico di $\mu_0 = m$.

Il potenziale in \overline{MS} è dato da:

$$\tilde{V}(Q) \approx - \frac{e(\mu)^2}{Q^2 \left(1 - \frac{e(\mu)^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right)} = - \frac{e_{\text{eff}}^2(Q)}{Q^2}$$

dove: $e_{\text{eff}}^2(Q) = e^2(\mu) / \left(1 - \frac{e^2(\mu)}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right)$

ovvero

$$\frac{1}{e_{\text{eff}}^2(Q)} = \frac{1}{e^2(\mu)} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2}$$

← prendiamone $\mu \frac{d}{d\mu}$

$$0 = - \frac{2}{e^3} \left(\mu \frac{de}{d\mu} \right) + \frac{1}{12\pi^2} 2$$

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

sol.

\Rightarrow

$$e(\mu) = \frac{e(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Scriviamo la funzione β per $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$

$$\beta(\alpha) = \mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{2}{3\pi} \alpha^2$$

POLO DI LANDAU:

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \log \frac{\mu}{\mu_0}} = \Lambda_{\text{QCD}} = \mu_0 e^{\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_0)}}$$

$$\alpha(\mu) = -\frac{3\pi}{2} \frac{1}{\log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}}$$

siamo passati da un numero
adimensionale, $\alpha \approx 1/137, \dots$, ad una
scala d'energia $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 10^{286} \text{ eV}$

TRASMUTAZIONE DIMENSIONALE

Per $Q^2 \rightarrow 0$

$$\alpha \approx 1/137$$

Per $Q^2 = M_Z^2 \approx (91 \text{ GeV})^2$

$$\alpha \approx 1/129$$

FUNZIONI A 2 PUNTI DELL'ELETRONE: [S. 18]

Vogliamo calcolare ora

[PS. 7.1]

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i G(p) \quad \text{a 1-loop}$$

$$i G(p) = \text{diagram with shaded circle} = \text{diagram with straight line} + \text{diagram with loop} + \text{diagram with two loops} + \dots$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(p)}$$

A 1-loop abbiamo:

$$\text{diagram with loop} = i \Sigma(p) = \text{diagram with cross} + \text{diagram with loop and wavy line}$$

$i(\not{p}\delta_2 - (\delta_1 + \delta_2)m)$ $i \Sigma_2(p)$

Nella Feynman gauge ($\xi=1$)

$$i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-p)^2 + i\epsilon} = \dots =$$

L'algebra spinoriale in d dimensioni è:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(d-2) \gamma^\nu$$

Implementando la parametrizzazione di Feynman, traslando il momento k^μ per ottenere k^2 al propagatore e trascurando poi termini lineari in k al numeratore, otteniamo:

$$\Sigma_2(\not{p}) = -i e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx [(d-2)x \not{p} - d m] \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

$$\Delta = (1-x)(m^2 - x p^2)$$

Facendo la rotazione di Wick e l'integrale abbiamo:

$$\text{(Wick: } dk^0 \rightarrow i dk^0, \quad k^0 \rightarrow i k^0, \quad k^2 \rightarrow -k_E^2)$$

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2-\epsilon)x \not{p} - (4-\epsilon)m] \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) - \not{p} + 2m + \int_0^1 dx (2x \not{p} - 4m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right]$$

Includendo anche i controtermini:

controtermini

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \text{finite} \right) + \overbrace{\not{p} \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2) m}$$

↳ entra nel propagatore come $iG(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(\not{p})}$

La **massa al polo** è DEFINITA come la posizione del polo in p^2 della funzione a 2 punti, ovvero:

$$\boxed{G^{-1}(m_p) \equiv 0} \iff m_p - M + \Sigma(m_p) = 0$$

(ricordiamo che $M \equiv M_R$ è la massa rinormalizzata)

Rinormalizzando nello **schema \overline{MS}** abbiamo:

$$\boxed{\int_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) \quad \int_m^{\overline{MS}} = -\frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{\overline{MS}}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[(x p - 2m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} - x p + m \right]$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m) = -\frac{\alpha}{4\pi} m \left(4 + 3 \log \frac{\mu^2}{m} \right)$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m_p) = \Sigma^{\overline{MS}}(m) (1 + \mathcal{O}(e^2)) \quad \leftarrow \text{a meno di correzioni 2-loop}$$

$$\Rightarrow \boxed{m^{\overline{MS}} = m_p \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(4 + 3 \log \frac{\mu^2}{m_p} \right) \right)}$$

La massa rinormalizzata in uno schema come \overline{MS} ha un renormalization group running in funzione di μ :

$$m^{\overline{MS}} = m(\mu)$$

$$\mu \frac{dm(\mu)}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi} m$$

←

Anche le masse hanno un'evoluzione sotto il Gruppo di Rinormalizzazione (RG)

SCHEMA ON-SHELL

Possiamo anche rinormalizzare con uno schema on-shell, imponendo le condizioni:

$$\Sigma(m_p) \equiv 0$$

(ovvero $m \equiv m_p$
 massa rinormalizzata = massa al polo)

$$\left. \frac{d\Sigma(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=m_p} \equiv 0$$

Ovvero:

$$\Sigma(m_p) = \Sigma_2(m_p) - \delta_m m_p \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_m = \frac{1}{m_p} \Sigma_2(m_p)$$

$$\Sigma'(m_p) = \Sigma_2'(m_p) + \delta_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = -\Sigma_2'(m_p)$$

Si ottiene:

$$S_m = \frac{1}{m_p} \Sigma_2(m_p) = -\frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_p^2} + \frac{4}{3} \right)$$

Nel calcolo di $\Sigma'(p)$ si incontra una divergenza

$$\Sigma = \frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) - \not{p} + 2m + \int_0^1 dx (2x\not{p} - 4m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right] + \not{p} \Sigma_2 + \dots$$

$$\left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \gamma \not{p} \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m_p} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \int_0^1 dx 2x \left(\log \frac{\mu^2}{m_p^2} - \log(1-x)^2 \right) + \right. \\ \left. + m_p \int_0^1 dx (2x-4) \frac{2m_p x}{m_p^2(1-x)} \right] \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3 + \log \frac{\mu^2}{m^2}}$$

$$\left[-4 \left(\frac{1}{2} (x-1)^2 - \log(x-1) \right) \right]_0^1 \rightarrow e^- \text{ divergente!}$$

Questa è una **DIVERGENZA INFRAROSSA**, dovuta alla presenza di una particella a massa nulla: fotone.

Si cancellano quando andiamo a calcolare un'osservabile fisica.

Per semplicità, possiamo temporaneamente regolare questa divergenza dando una massa fittizia e molto piccola al fotone

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} = -\Sigma_2'(m_P) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_P^2} + 2 + \log \frac{m_\gamma^2}{m_P^2} \right)$$

Parentesi su divergente IR

Calcoliamo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ includendo correzioni di $O(\alpha)$.

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \propto \left| \begin{array}{c} e^- \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ e^+ \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} \mu^- \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu^+ \end{array} \right|^2$$

← livello albero

sono divergenti IR

$$+ 2 \operatorname{Re} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \times \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \right) \right]$$

interferenza con le correzioni a 1-loop "correzioni virtuali"
(disegno solo quelle per lo stato finale)

Fisicamente, però, nel selezionare lo stato finale $\mu^+\mu^-$ devo tenere in considerazione che è impossibile escludere fotoni con energia sufficientemente bassa (radiazione soffice) o collineari a μ^+ o μ^- :

non possono essere rilevati quindi neppure esclusi.
Devo quindi anche aggiungere $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma)$

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \right|^2$$

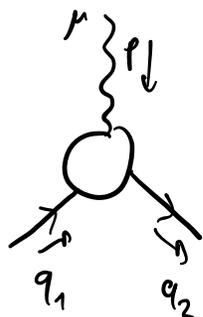
"correzioni di emissione reale"

← Questi cancellano le divergenze IR dai diagrammi virtuali.

CORREZIONE AL VERTICE DI QED

[S.17, PS. 6.2-3]

Vogliamo calcolare le correzioni 1PI al vertice  :



$$\equiv iM^\mu \equiv -ie \bar{u}(q_2) \Gamma^\mu(q_1, q_2) u(q_1)$$

$p^2 \neq 0$: fotone off-shell.

- In generale possiamo avere

$$\Gamma^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_2 p^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu$$

dove f_i sono funzioni scalari dei 4-momenti.

- Dalla conservazione del momento $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$ possiamo mettere $f_2 = 0$.
- Dato $\not{q}_1 u(q_1) = m u(q_1)$ e $\bar{u}(q_2) \not{q}_2 = m \bar{u}(q_2)$ f_i possono solo dipendere da m^2 e p^2 (o $q_1 \cdot q_2$) come p^2/m^2 , dato che f_i sono adimensionali.
- Identità di Ward implica:

$$p_\nu \Gamma^\nu = 0 = f_1 \bar{u} \not{p} u + f_3 (p \cdot q_1) \bar{u} u + f_4 (p \cdot q_2) \bar{u} u$$

$$\text{ma } p \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 - m^2 = -p \cdot q_2 \Rightarrow \Downarrow f_3 = f_4$$

$$\Rightarrow M^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_3 (q_1 + q_2)^\mu$$

Possiamo usare l'identità di Gordon

$$\bar{u}(q_2) \gamma^\mu u(q_1) = \bar{u}(q_2) \left[\frac{q_1^\mu + q_2^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} \right] u(q_1)$$

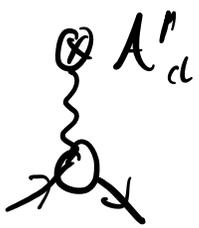
per scrivere:

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(q_2) \left[F_1\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \gamma^\mu + \frac{i \sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} F_2\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right] u(q_1)$$

A livello albero  abbiamo: $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$.

$$\Rightarrow \bar{F}_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha), \quad \bar{F}_2 = \mathcal{O}(\alpha)$$

CARICA ELETTRICA σ MOMENTO MAGNETICO [PS.6.2]



σ campo classico

Vediamo il caso del potenziale elettrostatico $\phi(\vec{x})$.

Prendiamo $\tilde{A}'_\alpha = (i2\pi) \delta(p^0) \tilde{\phi}(p), \vec{0}$

Nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$ (grandi distanze)

$$i\mathcal{M} = iM_\mu A'_\alpha = -ie \bar{u}(q_2) F_1(0) \gamma^0 u(q_1) \tilde{\phi}(\vec{p}) \approx -ie F_1(0) \tilde{\phi}(\vec{p}) 2m \xi_2^\dagger \xi_1$$

$$\tilde{\phi}(\vec{p}) \sim \frac{-1}{|\vec{p}|^2}$$

⇒ $e F_1(\vec{p})$ è la carica elettrica effettiva a grandi distanze.

Una possibile **CONDIZIONE DI RINORMALIZZAZIONE**

ON-SHELL sarà $F_1(0) \equiv 1$

ovvero e_R è la carica effettiva a grandi distanze.

Prendiamo ora il **POTENZIALE MAGNETICO** A_{cl}^i

$$\tilde{B}^i(\vec{p}) = -i \varepsilon^{ijk} p^j \tilde{A}_{cl}^k(\vec{p})$$

$$iM = iM_p A_{cl}^n = +ie \left[\bar{u}(q_2) \left(\gamma^i F_1 + \frac{i \sigma^{iv} p_v}{2m} F_2 \right) u(q_1) \right] \tilde{A}_{cl}^i(\vec{p})$$

$$u(q) = \begin{pmatrix} \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \\ \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} (1 - \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \\ (1 + \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) = 2m \xi_2^+ \left(\frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{v}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{v}}{2m} \right) \xi_1$$

Usando $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k$ $\vec{p} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$

$$\bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) \approx \xi_2^+ \xi_1 (q_1 + q_2)^i + 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

$$\bar{u}(q_2) \frac{i}{2m} \sigma^{iv} p_v u(q_1) \approx 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

Il termine $(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2) \cdot \vec{A}$ descrive la forza di Lorentz
 Il resto da, nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow iM = -i(2m) e \frac{\xi_2^+}{2} \left(\frac{-1}{2m} \gamma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi_1 \tilde{B}^k(p)$$

Descrive un momento magnetico

$$V(\vec{x}) = - \langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(x) \quad \text{con}$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \frac{\xi_2^+ \vec{\gamma}}{2} \xi_1 = \frac{\xi_2^+}{2} \left(g \frac{e}{2m} \vec{S} \right) \xi_1$$

\uparrow
 fattore g di Landé
 \uparrow
 spin

con $g = 2 [F_1(0) + F_2(0)]$

Con la condizione di rinormalizzazione on-shell
 $F_1(0) \equiv 1$ abbiamo

$$g = 2 + \underbrace{2 F_2(0)}_{\text{anomalo}}, \quad F_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha)$$

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

CALCOLO DELLA CORREZIONE AL VERTICE A 1-LOOP

[S.17.2, S.19.3]

$$-ie_R \Gamma^M = \text{1PI} = -ie_R \gamma^M + -ie_R \int_1 \gamma^M + i \Gamma_2^M$$

$$i \Gamma_2^M = \text{diagram} = \bar{u}(q_2) i \Gamma_2^M u(q_1)$$

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\nu\alpha}}{(k-q_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}(q_2) \gamma^\nu i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u(q_1)$$

$$= -e^3 \bar{u}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{\underbrace{[(k-q_1)^2 + i\epsilon]}_C \underbrace{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}_B \underbrace{[k^2 - m^2 + i\epsilon]}_A} \} N^M \rightarrow \text{numeratore}$$

La parametrizzazione di Feynman con 3 propagatori da:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}$$

Il denominatore diventa:

$$xA + yB + zC = (k^\mu + y p^\mu - z q_1^\mu)^2 - \Delta + i\epsilon$$

\downarrow $k^\mu \rightarrow k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu$ & shift
 $k^2 - \Delta + i\epsilon$

$$\Delta = -xy p^2 + (1-z)^2 m^2$$

Facendo lo shift al numeratore, usando
 $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} g^{\mu\nu} k^2$, l'identità di Gordon e $x+y+z=1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} N^\mu = \left[-\frac{1}{2} k^2 + (1-x)(1-y) p^2 + (1-4z+z^2) m^2 \right] \bar{u} \gamma^\mu u + \\ + 2m^2 z(1-z) \left(i \not{p}_\nu \frac{\bar{u} \sigma^{\mu\nu} u}{2m} \right) + \underbrace{m(z-z)(x-y) p^\mu}_{=0} \bar{u} u$$

Questo termine dà contributo nullo all'integrale poiché è dispari in $x \leftrightarrow y$ mentre il resto è pari.

Dall'identità di Ward infatti ce lo aspettiamo.

Definisco $F_1(p^2) = 1 + f_1(p^2) + S_1 + \mathcal{O}(e^4)$

$$f_1(p^2) = -2e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

$$F_2(p^2) = 4e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

Regolarizziamo in $d=4-\varepsilon$, $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d}$
 inoltre alcune parti finite nell'algebra di Dirac vengono modificate.

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{-i}{32\pi^2 \Delta} \leftarrow \text{è finito}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \frac{d}{4} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right)$$

Valutiamo prima il momento magnetico anomalo

$$\Rightarrow \bar{F}_2(p^2) = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx dy dz \int (x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xy p^2}$$

Per $p^2=0$ troviamo:

$$\bar{F}_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int (x+y+z-1) \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e \approx 0,00116$$

Il momento magnetico anomalo dell'elettrone dunque è:

$$\Rightarrow \boxed{g = 2 + 2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) = 2.00232\dots}$$

Presentato per la prima volta da Schwinger, Feynman e Tomonaga nel 1948.

Adesso abbiamo: $a_e^{\text{th}} = 0.001159625181643(764)$
 $a_e^{\text{exp}} = 0.00115962518073(28)$

a_e è noto a 7 parti su 10^9 .

Per ottenere ciò, g è stato misurato con precisione di 10^{-12} .

Calcoliamo infine $F_1(p^2) = 1 + \mathcal{J}_1(p^2) + \mathcal{J}_2$

Per rinormalizzare la teoria è sufficiente calcolare la **parte divergente**.

L'unica tale viene dal termine con k^2 al numeratore

$$\mathcal{J}_1(p^2) = -2e^2 i \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{\frac{(d-2)^2}{d} k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} + \dots$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right) \quad \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{J}_1^{\text{div}}(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 + \dots \right)$$

Nello **schema \overline{MS}** avremmo

$$\mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\mathcal{J}_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\text{Quindi } \mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = \mathcal{J}_2^{\overline{MS}} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2,$$

come ci si aspettava da Ward-Takahashi.

Nello **schema on-shell** occorre calcolare tutto $f_1(p^2)$.

Analogamente a $\Sigma_2(p)$, c'è una divergenza IR che possiamo regolare dando una massa al fotone:

$$\Delta \rightarrow \Delta = (1-z)^2 m^2 - xy p^2 + z m_\gamma^2$$

Otteniamo

$$f_1(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - 2 \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{\Delta} + \log \frac{\mu^2}{\Delta} \right] \right)$$

Imponiamo la condizione di rinormalizzazione

$$F_1(0) = 1 + f_1(0) + \mathcal{J}_1 \equiv 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = -f_1(0) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log \frac{\mu^2}{m^2} + \log \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right)$$

Anche in questo schema possiamo verificare che

$$\mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = \mathcal{J}_2^{\text{MOM}} .$$

RIASSUNTO

[S.18.4]

Abbiamo riscritto i campi e parametri bare della Lagrangiana di QED introducendo costanti di rinormalizzazione:

$$\psi^0 = Z_2^{1/2} \psi^R, \quad A_\mu^0 = Z_3^{1/2} A_\mu^R,$$

$$m_0 = Z_m m_R, \quad e_0 = Z_e e_R.$$

Definiamo poi $Z_1 \equiv Z_e Z_2 Z_3^{1/2}$ ← rinormalizza il vertice

L'identità di Ward-Takahashi impone $Z_1 = Z_2 \Rightarrow e_R = Z_3^{1/2} e_0$.

I controtermini $\delta_i \equiv Z_i - 1$ riassorbono le divergenze UV in un dato SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE.

Nello SCHEMA ON-SHELL, si impongono le condizioni

$$\Pi(0) = 0, \quad \Sigma(m_f) = 0, \quad \Sigma'(m_f) = 0, \quad \Gamma^\mu(0) = \gamma^\mu$$

Da cui si ricavano i controtermini:

$$\delta_1^{\text{anom}} = \delta_2^{\text{anom}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log \frac{\mu^2}{m^2} + \log \frac{m_f^2}{m^2} \right)$$

$$\delta_3^{\text{anom}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m^2} \right)$$

Nello schema di sottrazione \overline{MS} , non si impongono condizioni di rinormalizzazione ma i controtermini vengono fissati RICHIEDENDO che cancellino i termini proporzionali a $\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$:

$$\int_1^{\overline{MS}} = \int_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$$

$$\int_3^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$$

- Le parti divergenti dei controtermini dipendono dal tipo di regolatore UV (Padi-Villars, dim-reg, etc..) ma NON dipendono dallo schema. Le parti finite sí.
- La scala di rinormalizzazione μ non è fisica. Questa indipendenza genera il gruppo di rinormalizzazione. Nello schema on-shell la scala μ è fissata implicitamente, e.g. a $\mu = m_p$ o $\mu = 0$.

Nella funzione a 2 punti del [S.23.1]
 fotone $\sim \text{Om}$, la dipendenza ad alte energie
 è UNIVERSALE

$$\tilde{\Pi}^{\text{HS}}(p^2 \gg \mu^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \frac{\mu^2}{p^2} + \dots \right]$$

$$\tilde{\Pi}^{\text{nom}}(p^2 \gg p_0^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \frac{p_0^2}{p^2} + \dots \right]$$

← Noi avevamo scelto
 $p_0^2 \equiv m^2$, ma in
 generale è arbitrario

L'indipendenza dalla scala di rinormalizzazione di
 ampiezze fisiche, come $\text{Om} + \text{nonOm}$

ci fornisce la **FUNZIONE BETA**

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e(\mu)^2}{p^2} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\mu^2}{p^2} + \dots \right)$$

$$\mu \frac{d\tilde{V}}{d\mu} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{de(\mu)}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

La soluzione con condizione al contorno $e(\mu_0)$ a μ_0 è:

$$e(\mu) = \frac{e(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Equazione del gruppo di
 rinormalizzazione per e .

FUNZIONE β DAI CONTROTERMINI [5.23.2]

Nota: in dim. reg. il $\log \mu^2$ è inseparabile dal polo $\frac{1}{\epsilon}$, venendo da un'espansione del tipo:

$$\mu^\epsilon \left(\frac{Z}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log p^2 + \dots \right) = \frac{Z}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{p^2}$$

→ Il coefficiente davanti a $\log \mu^2$ è lo stesso di $\frac{Z}{\epsilon}$.

Possiamo quindi ottenere la funzione $\beta^{(*)}$ estraendo solamente la parte divergente dell'ampiezza.

(*) Questo è valido solamente per il comportamento a grandi energie nel caso di schemi on-shell (MS).

Formalmente, la Lagrangiana in d -dimensioni è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \tilde{z}_3 \tilde{F}_{\mu\nu}^2 + i \tilde{z}_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m_R \tilde{z}_2 \tilde{z}_m \bar{\psi} \psi - \mu^{\frac{4-d}{2}} e_R \tilde{z}_e \tilde{z}_2 \tilde{z}_3^{\frac{1}{2}} \bar{\psi} A \psi$$

mentre i parametri della Lagrangiana base sono indipendenti da μ . In particolare

$$0 = \frac{de_0}{d \log \mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R \tilde{z}_e \right] = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R \tilde{z}_e \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{de}{d\mu} + \frac{\mu}{\tilde{z}_e} \frac{d\tilde{z}_e}{d\mu} \right]$$

Al leading order in e_R , $\tilde{z}_e = 1 \Rightarrow \mu \frac{de}{d\mu} = \beta^{(0)} = -\frac{\epsilon}{2} e_R$

All'ordine successivo: $Z_e = 1 + \frac{e_R^2}{16\pi^2} \left[\frac{4}{3\varepsilon} + \dots \right] \equiv 1 + \frac{b_1}{\varepsilon} e_R^2 + \dots$

↑ termini finiti
dipendenti dallo
schema.

$$\Rightarrow \mu \frac{dZ_e}{d\mu} = \frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R \mu \frac{de}{d\mu} \leftarrow \beta^{(d)}$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R^2 \frac{\varepsilon}{2} = -b_1 e_R^2 = -\frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

Usando questo risultato troviamo

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta(e_R)}{e_R} - \frac{e_R^2}{12\pi^2} = 0 \Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{e_R \varepsilon}{2} + \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Ovvero nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Possiamo quindi ottenere la funzione beta senza doverci riferire ad osservabili esplicite, come $\tilde{V}(p^2)$.

Dato che $Z_e = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} \underset{\text{Ward}}{=} Z_3^{-1/2}$ è chiaro che

$\beta(e_R)$ viene solamente da diagrammi: 

Analogamente, possiamo anche trovare l'equazione RG per la massa dell'elettrone:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m^0 = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_m m_R) = Z_m m_R \left[\frac{\mu}{m_R} \frac{d m_R}{d\mu} + \frac{\mu}{Z_m} \frac{d Z_m}{d\mu} \right]$$

Definiamo la **DIMENSIONE ANOMALA**

$$\gamma_m \equiv \frac{\mu}{m_R} \frac{d m_R}{d\mu}$$

$$\Rightarrow \gamma_m = - \frac{\mu}{Z_m} \frac{d Z_m}{d\mu} = - \frac{1}{Z_m} \frac{d Z_m}{d e_R} \mu \frac{d e_R}{d\mu}$$

A 1-loop $Z_m \equiv 1 + \delta_m = 1 - \frac{3e_R^2}{16\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} + \text{termini finiti} \right)$

mentre $\mu \frac{d e}{d\mu} = \beta^{(0)} = -\frac{\epsilon}{2} e_R + \mathcal{O}(e_R^3)$

$$\Rightarrow \gamma_m = - \frac{1}{1 + \delta_m} \left(\frac{2}{e_R} \delta_m \right) \left(-\frac{\epsilon}{2} e_R \right) = \delta_m \epsilon + \mathcal{O}(e_R^3)$$

$$\gamma_m = -\frac{3e_R^2}{8\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{d m_R}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi^2} m_R$$

Possiamo anche trovare le DIMENSIONI ANGOLARI
del campo del fotone e dell'elettrone:

$$\gamma_3 \equiv \frac{\mu}{z_3} \frac{dz_3}{d\mu} = \frac{1}{z_3} \frac{dz_3}{de_R} \beta^{(1)}(e_R) = - \int_3 \varepsilon = \frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu}{z_2} \frac{dz_2}{d\mu} = - \int_2 \varepsilon = \frac{e_R^2}{16\pi^2}$$

EQUAZIONE DI CALLAN-SYMANZIK [5.23.43]

Consideriamo una funzione di Green con n fotoni e m elettroni "bare":

$$G_{n,m}^{(0)} = \langle 0 | T \{ A_{\mu_1}^0 \dots A_{\mu_n}^0 \psi_1^0 \dots \psi_m^0 \} | 0 \rangle$$

è indipendente da μ dato che μ non appare in \mathcal{L} , ma è divergente.

In termini della funzione di Green con campi rinormalizzati (che sarà invece finita)

$$G_{n,m} = \langle 0 | T \{ A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n} \psi_1 \dots \psi_m \} | 0 \rangle$$

abbiamo:
$$G_{n,m}^{(0)} = z_3^{\frac{n}{2}} z_2^{\frac{m}{2}} G_{n,m}$$

$G_{n,m}$ può dipendere da μ sia esplicitamente che via i parametri e campi rinormalizzati:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G_{n,m}^{(0)} = z_3^{\frac{n}{2}} z_2^{\frac{m}{2}} \left[\mu \frac{d}{d\mu} + \frac{n}{2} \overbrace{\frac{\mu}{z_3} \frac{dz_3}{d\mu}}^{\gamma_3} + \frac{m}{2} \overbrace{\frac{\mu}{z_2} \frac{dz_2}{d\mu}}^{\gamma_2} + \mu \overbrace{\frac{d\epsilon_R}{d\mu}}^{\beta_e} \frac{d}{d\epsilon_R} + \mu \overbrace{\frac{dM_R}{d\mu} \frac{d}{dM_R}}^{\gamma_m} \right] G_{n,m}$$

Owero:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{M}{2} \gamma_2 + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + m_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_R} \right) G_{n,m} = 0$$

↑

Equazione di Callan-Symanzik

Se la funzione di Green ha anche un

OPERATORE LOCALE $\mathcal{O}(x)$, tipo $\mathcal{O}(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$

o $\int^d(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)$, definiamo

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{O} \equiv \gamma_{\mathcal{O}} \mathcal{O}$$

$\gamma_{\mathcal{O}}$: dimensione anomala di $\mathcal{O}(x)$

ed abbiamo:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{M}{2} \gamma_2 + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + m_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_R} + \gamma_{\mathcal{O}} \right) G = 0$$

Per la teoria $\lambda \phi^4$ (a massa nulla, per semplicità)

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) G_n = 0, \quad \text{dove} \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} \frac{dZ}{d\mu}$$

La soluzione è data da [vedi PS.12.3]

$$\tilde{G}_n(\{P_i\}; \lambda, \mu) = \tilde{G}_n(\{P_i\}; \bar{\lambda}(t), \mu_0) e^{\frac{n}{2} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt}$$

dove $t \equiv \log \frac{\mu_0}{\mu}$ e

$\bar{\lambda}(t)$ è la soluzione all'equazione di R6

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{\lambda}(t) = \beta(\bar{\lambda}) = \frac{3\bar{\lambda}^{-2}}{16\pi^2} \\ \bar{\lambda}(0) = \lambda \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2} t}$$

↑
funzione β

Il termine esponenziale della dimensione anomala può essere valutato semplicemente, se approssimiamo

$$\gamma \approx \text{const} :$$

$$e^{\frac{n}{2} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt} \approx e^{\frac{n}{2} t \gamma} = e^{\frac{n}{2} \log \frac{\mu_0}{\mu} \gamma} = \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma} = \left(-\frac{n}{2} \gamma + \frac{n}{2} \gamma \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma} = 0$$

DIMENSIONI ANOMALE

[5.23.4.4]

La dimensione classica di un campo o un parametro indica la sua dimensione in energia, per esempio in $d=4$

$$[\varphi] = 1, \quad [m] = 1, \quad [e] = 0, \quad [A_\mu] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}$$

Questo ci indica cosa succede sotto un riscalamento delle coordinate. Prendiamo la teoria φ^4 :

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + g \varphi^4 \right]$$

L'azione classica è invariante sotto **DILATAZIONI** \mathcal{D}

$$x^\mu \rightarrow \frac{1}{\lambda} x^\mu, \quad \partial_\mu \rightarrow \lambda \partial_\mu, \quad m \rightarrow \lambda m, \quad g \rightarrow \lambda g \quad \text{e} \quad \varphi \rightarrow \lambda^1 \varphi.$$

$$\mathcal{D}: \left\{ \begin{array}{l} \varphi \rightarrow \lambda^{d_\varphi} \varphi \\ g \rightarrow \lambda^{d_g} g \\ m \rightarrow \lambda^{d_m} m \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad d_\alpha \text{ sono le } \text{DIMENSIONI CLASSICHE}$$

Prendiamo una funzione di Green

$$G_n = \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle$$

A livello classico, può dipendere da oggetti in \mathcal{L} a diverse potenze:

$$G_n(x, g, \mu) \sim \mu^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \quad \text{e} \quad \leftarrow \text{analisi dimensionale} \\ a - c_1 - \dots - c_n = n$$
$$\Rightarrow G_n \rightarrow \lambda^n G_n$$

A livello quantistico, la teoria deve essere rinormalizzata e una dipendenza dalla scala di rinormalizzazione μ compare in G_n :

$$G_n(x, g, \mu) \sim \mu^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \mu^{-\gamma} \Rightarrow \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma \right) G_n = 0$$

Adesso: $a - c_1 - \dots - c_n = n + \gamma$

Dato che μ non appare in Σ , non trasforma sotto dilatazioni \mathcal{D} , quindi

$$G_n \rightarrow \lambda^{n+\gamma} G_n \quad \Leftarrow$$

A livello quantistico la dimensione di scaling di γ è cambiata.