SISTEMI DINAMICI

Coniugazione Topologica : quando due sistemi dinamici sono equivalenti.

Topologicamente coniugati

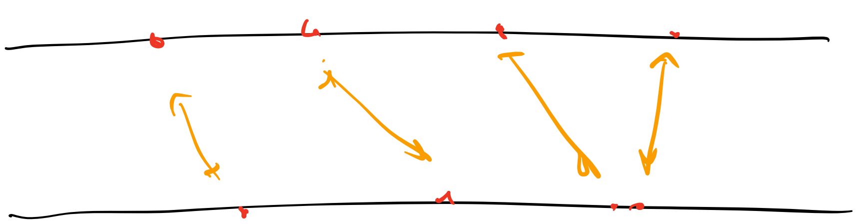
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_T"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_T"] & B \end{tikzcd}$$

$$h(\varphi_T(x)) = \psi_T(h(x))$$

Topologicamente equivalenti

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_{\tau(x,T)}"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_T"'] & B \end{tikzcd}$$

Teorema $\longrightarrow$ φ, ψ in $\mathbb{R}$



Def due flussi $\varphi_t : A \to A$ e $\psi_t : B \to B$ si dicono diffeomorfi se $\exists\, h$ diffeomorfismo t.c.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"'] & B \end{tikzcd}$$

commuti

↳ equivalenza rispetto ad una certa struttura

Teorema [coniugazione lineare]

Consideriamo i flussi φ_t e ψ_t di due sistemi dinamici lineari

$$\dot{x} = A x$$

$$\dot{y} = B y$$

Allora φ_T e ψ_T sono diffeomorfi se e solo se A è simile a B

<u>Dim</u> Assumiamo che A e B siano simili $\Rightarrow \exists\, H$ non singolare t.c. $HA = BH$. Poniamo $h(x) = Hx$

$$h(\varphi_T(x)) = H e^{TA} x =$$

$$= e^{tHAH^{-1}} Hx$$

$$H e^{TA} H^{-1} = e^{THAH^{-1}}$$

$$= e^{TB} h(x) = \psi_T(h(x))$$

Altra implicazione: supponiamo di avere un diffeomorfismo g, tale che

$$g(\varphi_T(x)) = \psi_T(g(x)).$$

L'origine è un punto fisso di φ_T. Poniamo $g(0) = c$.

Allora $g(\varphi_T(0)) = c = \varphi_T(c)$

e c è un punto fisso di φ.

Definiamo $\boxed{h(x) = g(x) - c}$

(pertanto $h(0) = 0$)

Inoltre

$$h(\varphi_T(x)) = \varphi_T(g(x)) - c$$

$$\left[\varphi_T(y) = e^{TB} y \right]$$

$$= \varphi_T(h(x) + c) - c = \varphi_T(h(x))$$

$$\left[\varphi_T(c) = c \quad \text{punto critico} \right]$$

Per finire, definiamo

$$H = Dh(0)$$

Adesso derivare l'equazione precedente rispetto a x e poniamo $x=0$

$$\frac{d}{dx}\left(H e^{\tau A} x \right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\tau B} H x \right)$$

calcolato il $x=0$

$$\to \quad H e^{\tau A} = e^{\tau B} H$$

Derivando rispetto a τ e ponendo $\tau = 0$

$$\to \quad HA = BH$$

Vogliamo rendere più precisa l'intuizione che il comportamento di un sistema non-lineare vicino ad un punto critico iperbolico è equivalente a quello della sua linearizzazione.

<u>Teorema</u> [Hartmann-Grobman]

Sia x^* un punto di equilibrio iperbolico di un campo vettoriale $f(x)$ $(\in C^1)$, con flusso $\varphi_t(x)$.

Allora $\exists$ intorno N di x^* t.c. φ è topologicamente coniugato alla sua linearizzazione su N.

<u>Dim</u> [Sketch]

Prendiamo il sistema dinamico della forma

$$\dot{x} = Ax + g(t)$$

$\uparrow \in C^1$

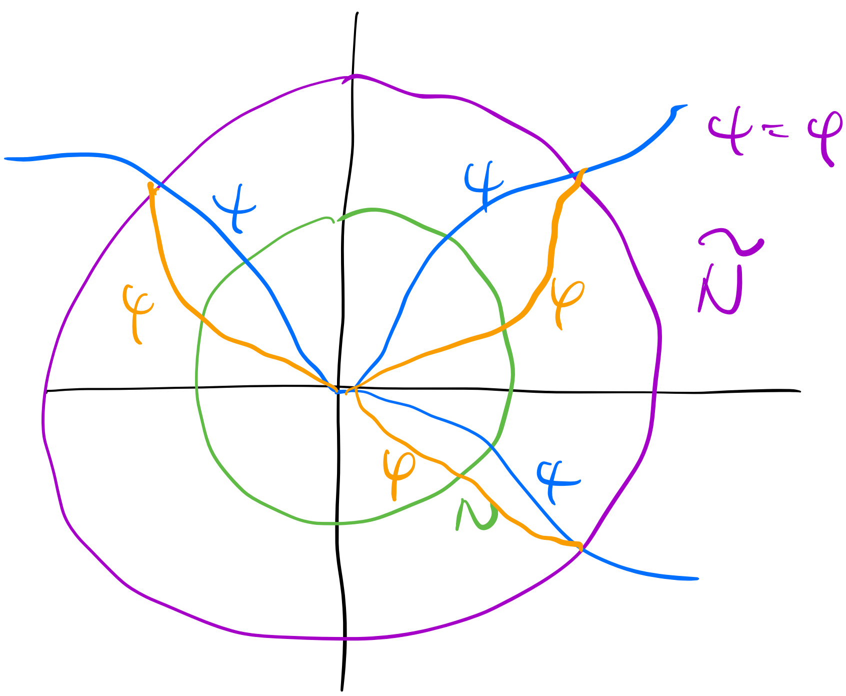
Flusso dell'eq. lineare: $\varphi_t(x) = e^{tA}x$

Il Teorema è locale, quindi modifichiamo l'eq. diff

$$\dot{x} = Ax + \tilde{g}(t)$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{in un intorno } N \text{ di } 0 \\ 0 & \text{fuori da } \tilde{N} \end{cases}$$

$(N \subset \tilde{N})$



Chiamiamo ψ_t il flusso per questo sistema

Vogliamo dimostrare che $\exists$ un omeomorfismo h tale che

$$\varphi_\tau(h(x)) = h(\varphi_\tau(x))$$

$$h(x) = e^{-\tau A} \cdot h \cdot \varphi_\tau(x)$$

Supponiamo di avere H_1 un omeomorfismo che soddisfa questa relazione per $\tau = 1$

$$H_1(x) = e^{-A} H_1(\varphi_1(x))$$

e supponiamo di poter dimostrare che H_1 è unico.

Poniamo $H_\tau(x) = \underline{e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau(x)}$

Allora H_τ deve coincidere con H_1:

$$\underline{e^{-A} H_\tau \circ \varphi_1(x)} =$$

$$= e^{-A} e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau \circ \varphi_1 (x)$$

$$= e^{-\tau A} e^{-A} \circ H_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_\tau (x)$$

$\uparrow$ proprietà gruppali del flusso

$$= e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau (x) = H_\tau$$

Quindi H_τ soddisfa la stessa relazione di H_1 e quindi $H_\tau = H_1$:

cioè $H_1 = e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau (x)$

$\Rightarrow$ H_1 è l'omeomorfismo anche per $\tau \neq 1$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\varphi_\tau"] \arrow[d, "H_1"'] & x(\tau) \arrow[r, "\varphi_{1-\tau}"] \arrow[d, "H_1"] & x(1) \arrow[d, "H_1"] \\
y \arrow[r, "e^{\tau A}"] & y(\tau) \arrow[r, "e^{(1-\tau)A}"] & y(1)
\end{tikzcd}$$

Allora il problema è quello di trovare H_1.

Poniamo $H_1^{(0)}(x) = x$ e definiamo

$$H_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ H_1^{(i)} \circ \varphi_1(x)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

La parte tecnica è dimostrare che H_1 è unico, e dimostrare che l'iterazione converge

VARIETÀ INVARIANTI

Abbiamo visto che per sistemi lineari (iperbolici) gli spazi

$\bar{E}^s$ e $\bar{E}^u$ sono invarianti durante la dinamica

→ generalizzazione ai sistemi non lineari iperbolici

Se Λ è un insieme invariante

$$W^s(\Lambda) = \left\{ x \notin \Lambda \ : \ \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \Lambda \right\}$$

insieme stabile o bacino di attrazione

$$W^u(\Lambda) = \left\{ x \notin \Lambda \ : \ \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \Lambda \right\}$$

insieme instabile o bacino di repulsione.

In particolare $W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda)$ sono insiemi invarianti: se $x \in W^s(\Lambda)$, per definizione $\varphi_s(x)$ ha la proprietà che $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\tau(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+\tau}(x) \longrightarrow \Lambda$$
$$\tau \to +\infty$$

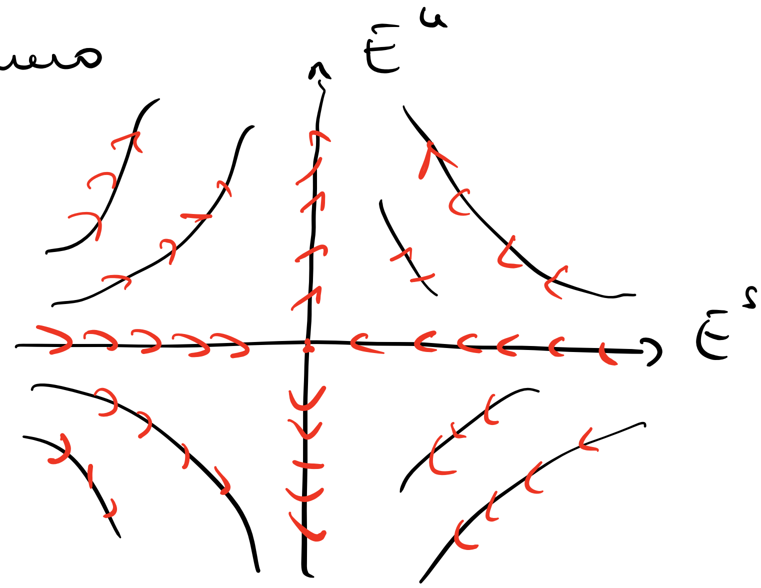
e quindi $\varphi_s(x) \in W^s(\Lambda)$

Esempio   Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases}$$

Prima linearizziamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$



Autovalori ± 1

E^s asse delle x

E^u asse delle y.

Troviamo W^s, W^u nel sistema non-lineare.

W^u è ancora l'asse delle y:

Se $x_0 = 0$, l'eq $\dot{x} = -x$ dà

$x(T) = x_0 e^{-T} = 0$. Allora

$\dot{y} = y + x^2 = y$ e risolto da

$$y(T) = y_0 e^{T} \xrightarrow[T \to -\infty]{} 0$$

Cerchiamo W^s. Supponiamo di avere

dati iniziali $(x_0, y_0) \in W^s$.

$$\dot{x} = -x \longrightarrow x(T) = x_0 e^{-T}$$

$$\dot{y} = y + x^2 = y + x_0^2 e^{-2T}$$

Abbiamo:

$$\frac{d}{dT}\left(e^{-T} y\right) = e^{-T}\dot{y} - y e^{-T} =$$

$$= e^{-T}(\dot{y} - y) = x_0^2 e^{-3T}$$

Integrando

$$e^{-T} y(T) = y_0 + \int_0^T x_0^2 e^{-3\tau} d\tau$$

$$= y_0 + \frac{x_0^2}{3}\left(1 - e^{-3T}\right)$$

$$= \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) - \frac{x_0^2}{3} e^{-3T}$$

Vediamo che prendendo:

$$W^s = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = -\frac{x^2}{3} \right\}$$

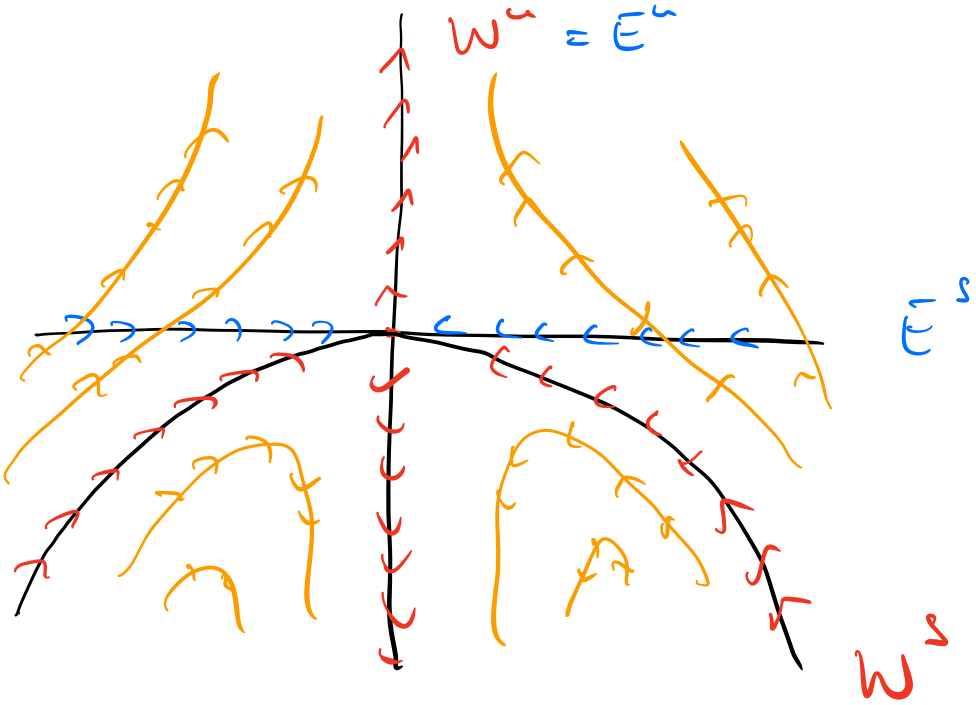
abbiamo $y_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$ per il dato iniziale, e la soluzione

$$(x, y) = \left(x_0 e^{-T}, \; -\frac{x_0^2}{3} e^{-2T} \right)$$

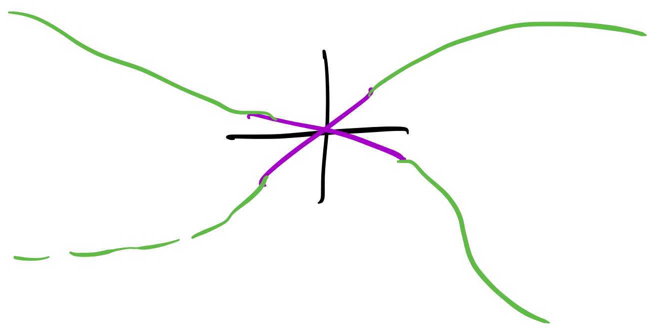
x $\qquad$ $y = -\frac{x^2}{3}$

rimane su W^s e

tende a $(0,0)$ per $T \to +\infty$



E^s è tangente a W^s all'origine



Definizioni

- Un orbita Γ si dice eteroclina se $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti ad un insieme invariante B e asintoticamente indietro ad un insieme invariante A

$\longrightarrow \quad \Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(B)$

- un orbita Γ si dice omoclina

$$\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(A)$$

<u>Esempio</u> $\quad H(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{4}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + x \end{cases}$$ sistema hamiltoniano

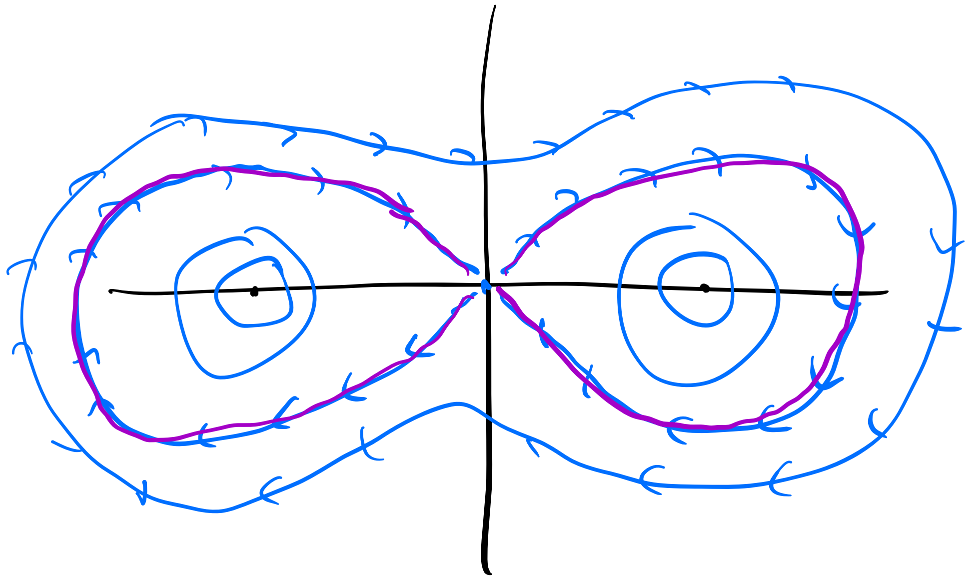
Equilibrio : $(0,0)$ $\quad (+1,0)$ $\quad (-1,0)$

$H = \frac{1}{4}$ $\quad H=0$ $\quad H=0$

Linearizzando : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(0,0) \longrightarrow$ autovalori $\pm 1 \rightarrow$ sella

$(\pm 1, 0) \longrightarrow$ autovalori $\pm \sqrt{2}\, i \rightarrow$ centro



orbite giacciono su $H = \text{cost.}$

omoclina

Teorema (della varietà stabile locale)

Sistema dinamico $\dot{x} = Ax + g(x)$

con $g(0) = 0$. A sia iperbolica ($g \in C^k$, $k \geq 1$). U intorno del punto fisso 0

supponiamo $g(x) \sim o(x)$

Se E^s, E^u sono sottospazi stabile e instabile di A, $\exists\, \tilde{U} \subset U$ tale che

$$W^{(s)}_{loc}(0) = \{ x \in W^s_{(0)} : \varphi_t(x) \in \tilde{U} \quad t \geq 0 \}$$

è una varietà differenziabile di classe C^k, tangente a E^s in 0.

$$\longrightarrow \quad T_0 W^s_{loc}(0) = E^s$$

$$W^s_{(x^*)} = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}\left(W^s_{loc}(x^*) \right)$$

$\longrightarrow$ varietà globale stabile