Meccanica Classica

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ valore di un set di variabili dinamiche

$\updownarrow$

Pto $(\bar{p}, \bar{q})$ nello spazio delle fasi

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati (fasi)
descritto da $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$

Eq. della dinamica

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

permette di predire la posizione della particella (e il valore di ogni altra variabile dinamica)

Meccanica Quantistica:

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ distribuzione statistica dei risultati di misura delle variabili dinamiche

$\updownarrow$

FUNZIONE D'ONDA $\psi(\bar{x})$

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati
descritto da $\psi(\bar{x}, t)$

Eq. della dinamica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{x}) \right) \psi(\bar{x}, t)$$

permette di predire la probab. di misurare la particella nella posizione x: $|\psi(\bar{x})|^2$

$\psi(\bar{x})$ funzione a valori complessi
$\downarrow$
STATO
del SISTEMA

$\psi(\bar{x})$ ci dà informazioni sulla distribuz. statistica della variabile dinamica X

$\underline{n=1}$ $\rightsquigarrow$ $\psi(x)$

La probabilità che la particella si trovi nell'intervallo Δ è data da

$$P(x \in \Delta) = \int_{\Delta} dx \; \underbrace{k|\psi(x)|^2}_{\text{densità di probabilità}}$$

k è t.c. la probabilità di trovare la particella in qualsiasi valore di x è uguale a 1:

$$\underbrace{k\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1}_{\psi \in L^2(\mathbb{R})} \Rightarrow k^{-1} = \int_{\mathbb{R}} dx\, |\psi(x)|^2 \equiv \|\psi\|^2$$

Affinché ψ rappresenti uno stato ψ dev'essere L^2

Se ψ è t.c. $\|\psi\|^2 = 1$, allora ψ si dice funz. d'onda NORMALIZZATA

- Densità di probab. è $\dfrac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|^2}$

Notiamo che $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ sono due funz. d'onda diverse che danno la stessa densità di prob.

Domanda: $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ descrivono lo stesso stato?

- Essendo $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, posso esprimerla per mezzo della TRASFORMATA DI FOURIER

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \, \underbrace{e^{ikx}}_{\substack{\text{onda piana} \\ \text{monocromatica} \\ \text{che trasporta impulso } p=\hbar k}} \hat{\psi}(k)$$

cambiamo variab. integraz. $k = p/\hbar$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hbar} \int dp \, e^{ipx/\hbar} \underbrace{\hat{\psi}(p/\hbar)}_{\equiv \tilde{\psi}(p)}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p)$$

Sovrapposizione di onde a impulso definito con peso $\tilde{\psi}(p)$

$$1 = \int |\psi(x)|^2 dx = \int |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$$

$\tilde{\psi} \in L^2$

→ possiamo interpretare $|\tilde{\psi}(p)|^2$ come dens. prob. della distribuz. degli impulsi

• Trasf. di Fourier è biunivoca → è equivalente conoscere $\psi(x)$ o $\tilde{\psi}(p)$

- $\tilde{\psi}(p)$ è la funz. d'onda in rap. p
- $\psi(x)$ " " " " " " x

Possiamo tornare alla domanda precedente:

$\psi(x)$ e $\psi(x)e^{i\alpha(x)}$ hanno trasf. di F. diverse

→ danno distribuz. stat. in p diverse.

Rimangono due tipi di ambiguità (diverse ψ che danno lo stesso stato):

1) Se ψ e ψ' differiscono su un insieme di misura nulla, allora gli integrali del tipo $\int_\Delta |\psi(x)|^2 dx$ non cambiano

2) ψ e $\psi' = \beta\psi$ (β cost.) danno le stesse distrib. stat.

$$\frac{|\psi|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{|\beta\psi|^2}{\|\beta\psi\|^2}$$

→ relazione di equiv.

$\psi_1 \sim \psi_2$ se $\exists \beta$ t.c. $\psi_2(x) = \beta\,\psi_1(x)$

⇝ classi di equiv.

$$\hat{\psi} = \{ \beta\,\psi(x) \mid \beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0 \} \longleftrightarrow \text{STATO del SISTEMA}$$

Per lavorare con gli stati (classi di equiv) di solito si sceglie un RAPPRESENTANTE della classe

(tipicam. rappresentante a norma unitaria, funz. d'onda normalizzata)

- $\psi \in L^2$. Inoltre vogliamo che ψ si comporti come l'AMPIEZZA di un'onda, cioè che valga il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE, cioè combin. lin. di funzioni d'onda devi essere una funz. d'onda $\rightsquigarrow$ ψ deve appartenere a uno SPAZIO VETTORIALE

$\rightsquigarrow$ $L^2(\mathbb{R})$ è uno sp. vett.

- $L^2(\mathbb{R})$ è uno SPAZIO DI HILBERT : sp. vett. (a dim. ∞) con un prodotto scalare hermitiano

$$(\psi, \phi) = \int dx \, \psi^*(x) \phi(x) = (\phi, \psi)^* \quad \psi, \phi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$$

Prodotto scalare permette di def. una norma:

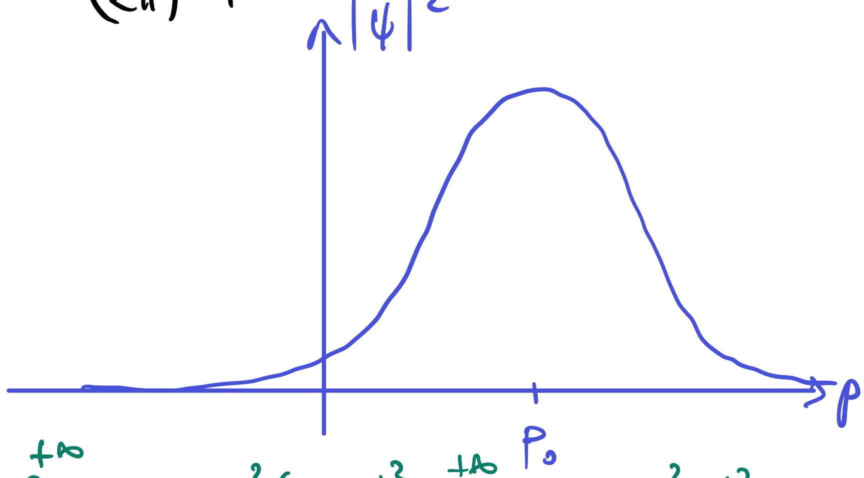
$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int dx \, \psi^*(x) \psi(x) = \int dx \, |\psi(x)|^2$$

Pacchetto d'onda GAUSSIANO

a, p_0 cost.

$$\psi(x) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2(p-p_0)^2}{4\hbar^2}} e^{ipx/\hbar}\, dp$$

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{a^2(p-p_0)^2}{4\hbar^2}}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} = \pi^{1/2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\alpha^2(\xi+\beta)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\, e^{-\alpha^2\xi'^2} = \frac{\pi^{1/2}}{\alpha}$$

$$\psi(x) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{i(p-p_0)x/\hbar}\, dp \qquad p' = p - p_0$$

$$-\frac{a^2}{4\hbar^2}\left(-\frac{4\hbar^2x^2}{a^4} + \frac{4\hbar^2x^2}{a^4}\right)$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}p'^2 + ip'x/\hbar}\, dp'$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}\underbrace{\left(p' - \frac{2\hbar i x}{a^2}\right)}_{\equiv p''}^2} e^{-x^2/a^2}$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2 p''^2}{4\hbar^2}}\, dp''\right) e^{-x^2/a^2}$$

$\alpha = a/2\hbar$

$$= \frac{\cancel{a^{1/2}}}{\cancel{\hbar^{1/2}}(2\pi)^{3/4}} \, \frac{2\hbar^{1/2}\pi^{1/2}}{a^{1/2}} \, e^{ip_0x/\hbar} \, e^{-x^2/a^2}$$

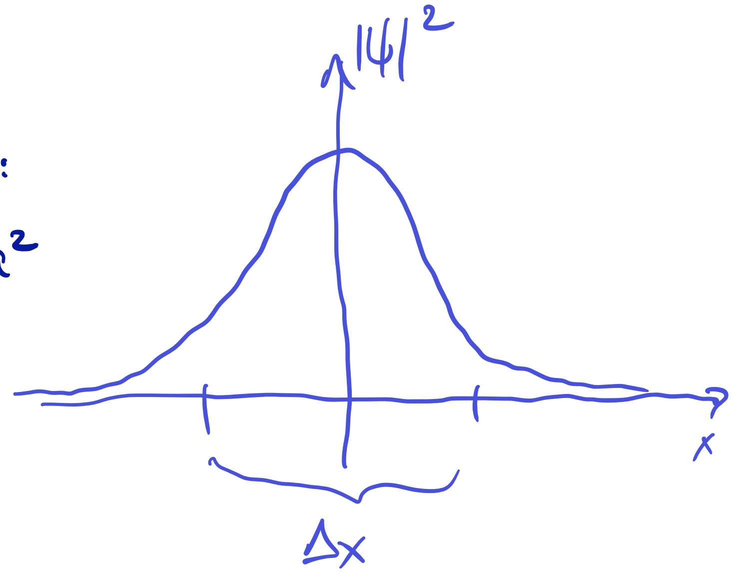
$$\psi(x) = \left(\frac{2\hbar^2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ip_0x/\hbar} \, e^{-x^2/a^2}$$

qto fattore è importante per lo stato del sist. (diverse p_0 danno diverse distrib $|\tilde{\Phi}(p)|^2/\|\tilde{\psi}\|^2$)

$$\|\psi\|^2 = \left(\frac{2\hbar^2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2/a^2}\,dx}_{a\sqrt{\pi/2}} = \hbar$$

Funz. d'onda NORMALIZZATA :

$$\psi = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right) e^{ip_0x/\hbar} \, e^{-x^2/a^2}$$



Valor medio di X

$$\langle x \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\psi(x)|^2 dx$$

funz. d'onda normalizzata

$$= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x\, e^{-2x^2/a^2}}_{\text{funz. dispari}} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} = -\frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} =$$

$$= -\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\pi^{1/2}}{\sqrt{\beta}}\right) = \frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{1}{\beta^{3/2}}$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle_\psi - \overset{0}{\overset{\parallel}{\langle x \rangle_\psi^2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2/a^2}$$

$$= \left(\frac{2}{\cancel{\pi} \cancel{a^2}}\right)^{1/2} \frac{\cancel{\pi}^{1/2}}{2} \frac{a^{\cancel{3}\,2}}{2^{3/2}} = \frac{a^2}{4} \to \Delta x = a/2$$

Con conti analoghi

$$\langle p \rangle_\psi = p_0 \leftarrow \int p\, e^{-(p-p_0)^2/\dots} = p_0 \overbrace{\int e^{-(p-p_0)^2/\dots}}^{=1} + \underbrace{\int (p-p_0) e^{-(p-p_0)^2/\dots}}_{=0}$$

$$\Delta p^2 = \frac{\hbar^2}{a^2} \to \Delta p = \frac{\hbar}{a}$$

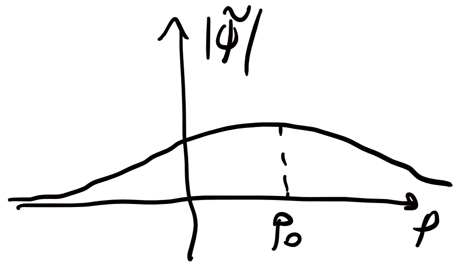
$$\to \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$ ← questo è il minimo valore che $\Delta x_\psi \Delta p_\psi$ può assumere.

Principio di indet. di Heisenberg

$$\Delta x_\psi \cdot \Delta p_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Se prepariamo ψ t.c. Δx molto piccolo

allora $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x$ è molto grande



Evoluzione temporale

Per particella libera: $E_p = \frac{p^2}{2m}$

$$\psi(x,t) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{3/4}} \int e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{i(px - E_p t)/\hbar} \, dp$$

Svolgendo l'integrale:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\varphi}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-\left(x - \frac{p_0 t}{m}\right)^2 / \left(a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}\right)}$$

- $\|\psi\|^2$ è cost. in t (probab. si conserva)
- $|\psi(x,t)|^2$ è ancora dens. di prob. Gaussiana, dove ora l'ampiezza dipende da t:

$$\Delta x(t) = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$$

"pacchetto d'onda si sparpaglia"

- $\langle x \rangle_{\psi_t} = \frac{p_0}{m} t$ ← particella (classica) libera $x_{cl}(t) = \frac{p_0}{m} t$
- $|\tilde{\psi}(p)|^2$ rimane cost. nel tempo $\Rightarrow$ $\langle p \rangle$ e $\langle \Delta p \rangle$ rimangono cost.

→ $\langle x \rangle_{\psi_t}$ soddisfa le equazioni del moto classiche per $x(t)$

$\langle p \rangle_{\psi_t}$ " " " per $p(t)$

Qto è vero per ogni variabile dinamica

$$\langle f(x,p)\rangle_{\psi_t} = f(x_{cl}(t), p_{cl}(t))$$

Soddisfa eq. di Schrödinger

soddisfano eq. di Hamilton