Specifica diofantea esponenziale della congettura di Goldbach

Eugenio Omodeo

Vogliamo formulare in un'aritmetica del prim'ordine concernente i numeri naturali la seguente

Congettura 1 (Goldbach, 1742) *Ogni numero intero pari, $n \geqslant 4$, può venir scomposto come*

$$n = p + q$$

con p, q numeri primi.

Un'enunciazione equivalente, piú facile da tradurre in formula, è questa:

Congettura 2 (Goldbach rielaborata) *Il doppio di qualsiasi numero naturale z può venir scomposto come*

$$z + z = x + y$$

con $x + 2$ ed $y + 2$ numeri primi.

Ad esempio, per $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, abbiamo le scomposizioni:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
0+0 & = & 0+0\,, & 1+1 & = & 1+1\,, & 2+2 & = & 1+3\,, \\
3+3 & = & 1+5\,, & 4+4 & = & 3+5\,, & 5+5 & = & 5+5\,, \\
6+6 & = & 1+11\,, & 7+7 & = & 3+11\,, & 8+8 & = & 1+15\,, \\
9+9 & = & 1+17\,. & & & & & &
\end{array}$$

Alla luce del teorema di John Wilson, abbiamo un'altra enunciazione ancora:

Congettura 3 (Goldbach ri-rielaborata) *Il doppio di qualsiasi numero naturale z può venir scomposto come*

$$z + z = x + y$$

dove $(x + 1)! + 1$ è divisibile per $2 + x$ ed $(y + 1)! + 1$ è divisibile per $2 + y$.

Da quest'ultima procediamo alla specifica aritmetica:

$$\forall z\,\exists x\,\exists y\,\exists p\,\exists q\,\exists v\,\exists w\,\big(z+z=x+y\ \&\ p=2+x\ \&\ q=2+y\ \&\ p\,v=(x+1)!+1\ \&\ q\,w=(y+1)!+1\big)$$

(ove le variabili spaziano su $\mathbb{N}$), o, piú compattamente:

$$\forall z\,\exists x\,\exists y\,\exists p\,\exists q\,\exists v\,\exists w\,\big(z+z=x+y\ \&\ p=2+x\cdot 0^{((x+1)!+1-(2+x)\,v)^2}\ \&\ q=2+y\cdot 0^{((y+1)!+1-(2+y)\,w)^2}\big)\,.$$

Spiegazione La quantità $\big((x+1)!+1-(2+x)\,v\big)^2$ potrà risultare positiva, caso in cui p varrà 2, un numero primo; oppure risultare 0, nel caso che $(x+1)!+1=(2+x)\,v$ ossia che $2+x \mid (x+1)!+1$ — e allora $p=2+x\cdot 1$ è di nuovo un numero primo, grazie al teorema di Wilson. $\dashv$

Possiamo riscrivere la condizione

$$z+z=x+y\ \&\ p=2+x\cdot 0^{((x+1)!+1-(2+x)\,v)^2}\ \&\ q=2+y\cdot 0^{((y+1)!+1-(2+y)\,w)^2}$$

in termini diofantei esponenziali, grazie alla riducibilità del coefficiente binomiale all'elevamento a potenza e del fattoriale al coefficiente binomiale. In effetti, vale $\binom{\ell}{i} = a$ se e solo se

$$a = \left\lfloor \frac{\left(2^\ell+2\right)^\ell}{(2^\ell+1)^i} \right\rfloor \ \%\ \left(2^\ell+1\right)\ ,$$

cioè[1], quando e solo quando vi sono numeri naturali u, s, t, h, k tali che[2]

$$\begin{aligned} u &= 2^\ell+1\,, \\ (u+1)^\ell &= t\,u\,u^i + a\,u^i + s\,, \\ s+h+1 &= u^i\,, \\ a+k+1 &= u\,; \end{aligned}$$

vale inoltre $b! = n$ se e solo se $n = \left\lfloor \frac{(2\,b)^{b^b}}{\binom{(2\,b)^b}{b}} \right\rfloor$.

Nella specifica aritmetica della congettura di Goldbach delineata sopra, il quantificatore universale $\forall z$ precede i quantificatori esistenziali (che sono:

[1] Stiamo indicando con ' % ' l'operazione *resto* della divisione fra naturali.

[2] In questa e in simili circostanze, un sistema $\&_{g=1}^{\kappa} l_g = r_g$ può sempre venir condensato in un'equazione sola per 'somma di quadrati', cosí: $\sum_{g=1}^{\kappa}(l_g^2+r_g^2)=\sum_{g=1}^{\kappa} 2\,l_g\,r_g$.

$\exists\, x \exists\, y \exists\, p \exists\, q \exists\, v \exists\, w$, piú altri che risultano dalla riduzione dei fattoriali $(x+1)!$ ed $(y+1)!$ all'elevamento a potenza). Domandiamoci: Si può depotenziare tale quantificatore universale rimpiazzandolo con quantificatori esistenziali, in modo che la congettura di Goldbach venga semplicemente ad asserire che una certa equazione esponenziale non ammette soluzione?

Viene in aiuto, a tale scopo, il teorema DPR:

Teorema 1 (Davis–Putnam–Robinson, 1960) *Sia f una funzione computabile definita su un insieme $D \subseteq \mathbb{N}$, a valori in $\mathbb{N}$. Il dominio D di tale funzione*[3] *è* diofanteo esponenziale*, nel senso che si possono costruire espressioni E_{sn} ed E_{dx} involgenti solo:*

- *costanti intere positive,*
- *variabili $z_1, \ldots, z_m$ (dette* incognite*), che spaziano sui naturali,*
- *un'ulteriore variabile a (detta il* parametro*),*
- *gli operatori di somma, prodotto ed elevamento a potenza,*

in modo tale che per ogni $a \in \mathbb{N}$ valga la biimplicazione

$$a \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, z_1 \cdots \exists\, z_m \; E_{\mathsf{sn}}(a, z_1, \ldots, z_m) = E_{\mathsf{dx}}(a, z_1, \ldots, z_m)\,,$$

Non è difficile specificare un procedimento che, a partire da un dato $a \in \mathbb{N}$, cerchi di scomporre il numero $n = 2\,a + 4$ come somma $n = p + q$ di due numeri primi: e che, se un tale p e un tale q esistono, dopo averli individuati (nell'intervallo $\{\, 2, \ldots, 2\,a+2 \,\}$) si addentri in un ciclo perpetuo, mentre in caso contrario si fermi producendo come risultato lo 0. La funzione f computata da tale procedimento avrà dominio $\emptyset$ oppure no a seconda che la congettura di Goldbach sia, o no, vera.

Disponendo di un test atto a stabilire o escludere la risolubilità di qualsiasi data equazione diofantea *esponenziale*—in analogia al test che Hilbert avrebbe voluto per stabilire o escludere la risolubilità di equazioni diofantee *polinomiali*—, potremmo dunque servircene per chiudere un problema che è rimasto insoluto per 180 anni: la congettura di Goldbach è vera se e solo se

$$\neg \exists\, a\, \exists\, z_1 \cdots \exists\, z_m \; E_{\mathsf{sn}}(a, z_1, \ldots, z_m) = E_{\mathsf{dx}}(a, z_1, \ldots, z_m)\,,$$

dove $E_{\mathsf{sn}}(a, \vec{z}) = E_{\mathsf{dx}}(a, \vec{z})$ è l'equazione diofantea esponenziale che il teorema DPR associa alla particolare funzione f che abbiamo descritto poco fa.

[3]N.B.: Le istruzioni per computare f lasciano generalmente implicito il sottoinsieme D di $\mathbb{N}$ su cui la computazione giunge effettivamente a termine.