SISTEMI DINAMICI

Il piano delle fasi

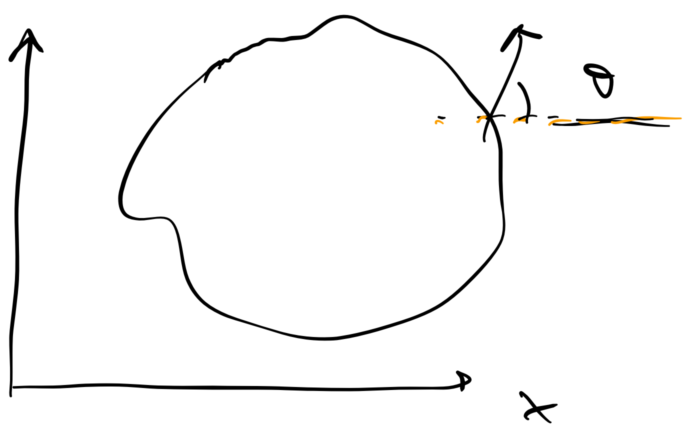
$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

→ qualche accenno a Tecniche Topologiche

Sia $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ curva chiusa

il campo vettoriale ha la forma

$f = (P, Q)$



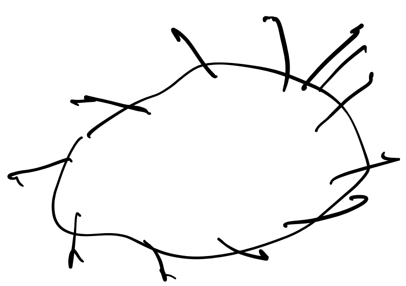
$$\tan\theta = \frac{Q}{P}$$

Def Date γ e f, l'indice (di Poincaré)

$$I_\gamma(f) := \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

il numero intero di rotazioni che il vettore $f(\bar{X})$ compie mentre il punto $\bar{X}$ si muove lungo la curva fino a tornare al punto di partenza

$\Delta\theta$ è il cambiamento netto dopo un giro.



Supponiamo $f \in C^1$. $\tan\theta = \frac{Q}{P}$

$$\sec^2\theta \, d\theta = \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2+Q^2}$$

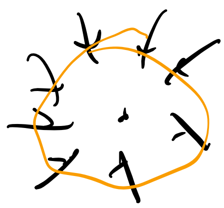
Proprietà

- se deformiamo γ continuamente senza attraversare un punto di equilibrio $(P^2+Q^2=0)$ l'indice non cambia
- se teniamo γ fissa e variamo il campo vettoriale in modo continuo l'indice non cambia.

Il motivo: l'indice è una funzione continua, ma può prendere solamente valori interi

$\Rightarrow$ è una costante

Esempio



$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

$$P = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$dP = -4 \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$Q = 2 \cos\theta \sin\theta$$

$$dQ = 2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right) d\theta$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) +$$

$$- (2 \cos\theta \sin\theta)(-4 \cos\theta \sin\theta) \Big\} d\theta \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + 4 \sin^2\theta \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = +2$$

Trovare $\begin{cases} \dot{x} = P \\ \dot{y} = Q \end{cases}$ con indice n

---

<u>Teorema</u> A matrice non singolare e $\dot{x} = Ax = f(x)$. Sia γ una curva chiusa che racchiude l'origine

orientata in senso orario

Allora $I_\gamma(f) = \operatorname{sgn} \det A$

<u>Dim</u>: A non singolare, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad \neq 0$, oppure $cd \neq 0$

Allora possiamo fare una deformazione continua di A per portarla in una delle due forme

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sgn} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} d \end{pmatrix} \quad o \quad \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sgn} b \\ \operatorname{sgn} c & 0 \end{pmatrix}$$

senza cambiare l'indice.

Scegliamo $\begin{pmatrix} \operatorname{sgn} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} d \end{pmatrix}$

Con un deformazione continua porto γ nel cerchio unitario

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint (\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} d) \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

$\longrightarrow \quad P = (\operatorname{sgn} a)\, x \qquad A = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} d \end{pmatrix}$

$Q = (\operatorname{sgn} d)\, y$

$$= \frac{(\operatorname{sgn} a)}{2\pi} (\operatorname{sgn} d) \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}{r^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, 2\pi \cdot (\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} d) = \operatorname{sgn} \det A$$

:)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}$$

<u>Teorema</u> Se la curva γ non contiene punti critici, allora

$$I_\gamma(f) = 0$$

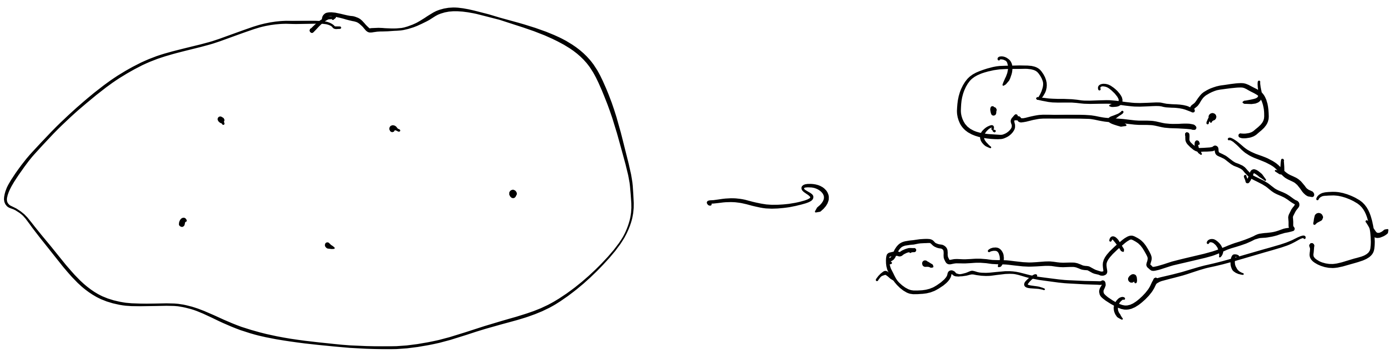
<u>Dim</u> Rimpiccioliamo γ finché il campo vettoriale è una costante

$\longrightarrow$ punta nella stessa direzione lungo tutte γ $\rightarrow$ $I_\gamma(f) = 0$

Non vale il viceversa : $I = 0$

non implica che non ci siano

punti di equilibrio



i contributi $\rightleftarrows$ si cancellano

Quindi $I_\gamma(f) = \sum_i I_{x_i^*}(f)$

$I_{x_i^*}(f)$ è l'indice di un punto

di eq. isolato , può essere positivo

o negativo

$I = 0$ $\not\Rightarrow$ non ci sono punti di equilibrio

Teorema Se γ è un'orbita periodica di f, $I_\gamma(f) = +1$

Dim f è sempre tangente a γ

Corollario: ogni orbita periodica contiene almeno un punto di equilibrio.

Teorema [Poincaré - Bendixon]

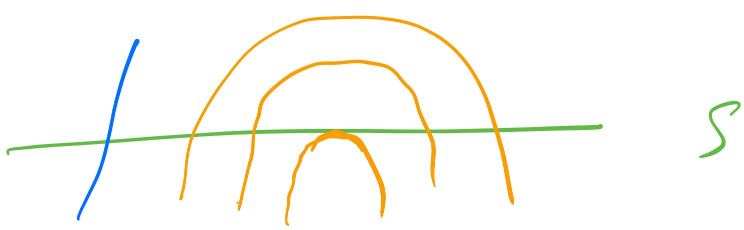
Sia φ_t un flusso su $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ sottoinsieme chiuso, limitato e invariante in avanti.

Allora $\forall x \in D$, l'insieme ω-limite $\omega(x)$ o contiene un punto di equilibrio o è una traiettoria periodica.

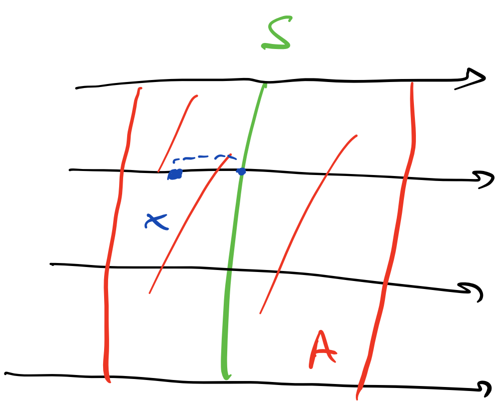
<u>Prima</u> chiamiamo un arco S una <u>sezione trasversa</u> al flusso φ^t, se è trasverso a $f(x)$ $\forall x \in S$

Se $f(y) \neq 0$ esiste sempre una sezione trasversa prendendo un segmento molto piccolo.

Inoltre le traiettorie tagliano S nello stesso verso



non è trasversale



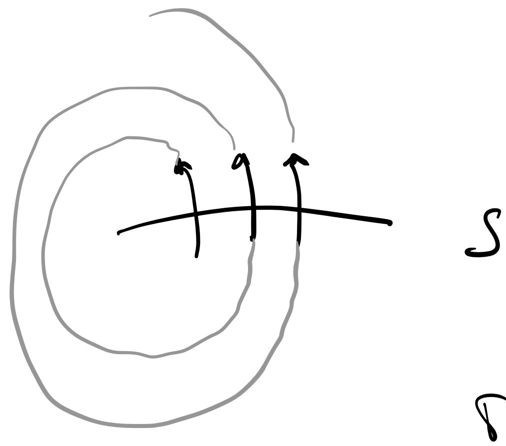
$$A = \bigcup_{|t|<\tau} \varphi^t(S)$$

↑ τ sufficientemente piccolo

$\forall x \in A \quad \exists ! \, \hat{s} \quad$ t.c. $\quad \phi_{\hat{s}}(x) \in S$

Lemma 1 Se il flusso φ^t taglia una sezione trasversa in $t_1 < t_2 < \cdots$ allora le intersezioni $\varphi^{t_j}(x)$ sono una successione monotona

Dim



Segue dal fatto che le traiettorie non si intersecano

Lemma 2 Supponiamo che $y \in S$ sia anche $y \in \omega(x)$. Allora y è l'unica intersezione di $\omega(x)$ con S.

Dim Siano $y, y' \in \omega(x) \cap S$

e $y \neq y'$.

Siano $\{t_k\}$, $\{t_k'\}$ sequenze t.c.

$$x_k = \varphi^{t_k}(x) \longrightarrow y$$

$$x_k' = \varphi^{t_k'}(x) \longrightarrow y'$$

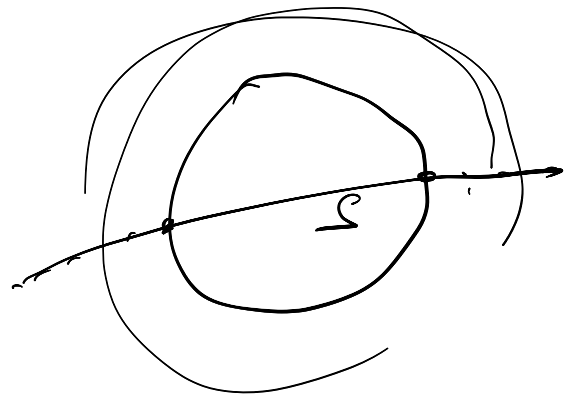
Per t grandi x_k e x_k' sono in un intorno cilindrico di S.

Non è restrittivo assumere che x_k e x_k' siano tutti su S (eventualmente cambiando i valori $\{t_k\}$ e $\{t_k'\}$)

Quindi prendendo da entrambe le sequenze $\{t_k\}$, $\{t_k'\}$ possiamo costruire una sequenza $\{t_k''\}$ t.c. $\varphi^{t_k''}(x)$ oscilla lungo S, in contraddizione con il lemma precedente

☺

Ad es



Dim [P-B]

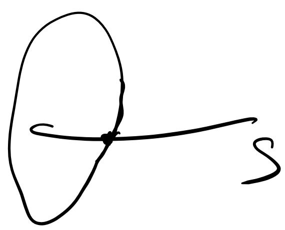
Se $\omega(x)$ non contiene punti di equilibrio, $y \in \omega(x)$, allora neanche $\omega(y) \subset \omega(x)$ contiene punti di equilibrio.

Prendiamo $z \in \omega(y)$, S una sezione trasversa contenente z, $\{t_n\}$ successione t.c. $\varphi^{t_n}(y) \to z$

Come in Lemma 2, possiamo assumere che i punti $\{\varphi^{t_n}(y)\}$ giacciono su S

Tutti i punti $\varphi^{T_n}(y)$ sono in $\omega(x)$ (perché è invariante) e $z \in \omega(x)$ ($z \in \omega(y) \subset \omega(x)$)

Tuttavia per il lemma 2, l'intersezione di $\omega(x)$ con S è unica $\Rightarrow$ Tutti questi punti coincidono con z e quindi la traiettoria di y è periodica



Chiamiamola γ

Abbiamo dimostrato che γ è contenuta in $\omega(x)$.

Adesso dimostriamo che coincidono

$$\lim_{t \to \infty} \text{dist}\left(\varphi^t(x), \gamma\right) = 0$$

Consideriamo S trasversa a γ

in $y \in \omega(x)$. Sia $\{t_k\}$ t.c.

$x_k = \varphi^{t_k}(x) \longrightarrow y$

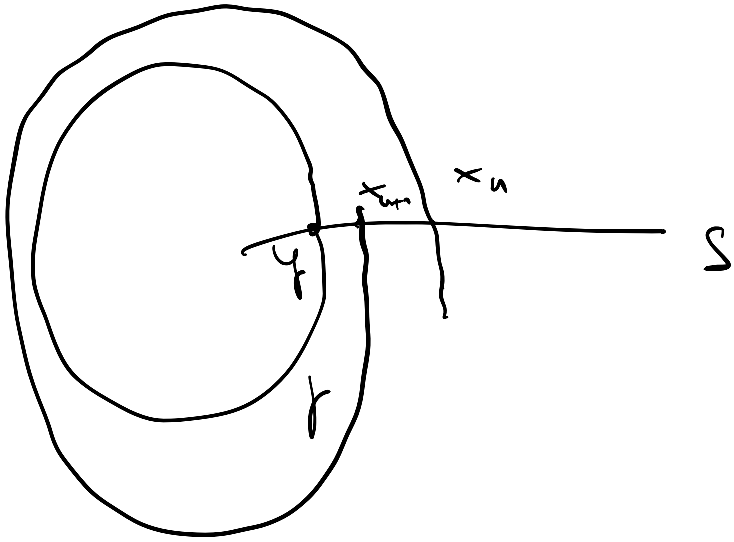
Possiamo supporre che $x_j \in S$ e $\varphi^t(x) \notin S$ quando $t \neq t_k$ (ad esempio $t_k < t < t_{k+1}$)

Se prendiamo k grande $\Rightarrow$ x_k è arbitrariamente vicino a y.

$\Rightarrow$ $t_{k+1} - t_k$ è arbitrariamente vicino al periodo T di γ.

Allora in questo intervallo, la distanza tra $\varphi^t(x_j)$ e $\varphi^t(y)$ (e quindi da γ) è limitata da cost. dist(y, x_j)

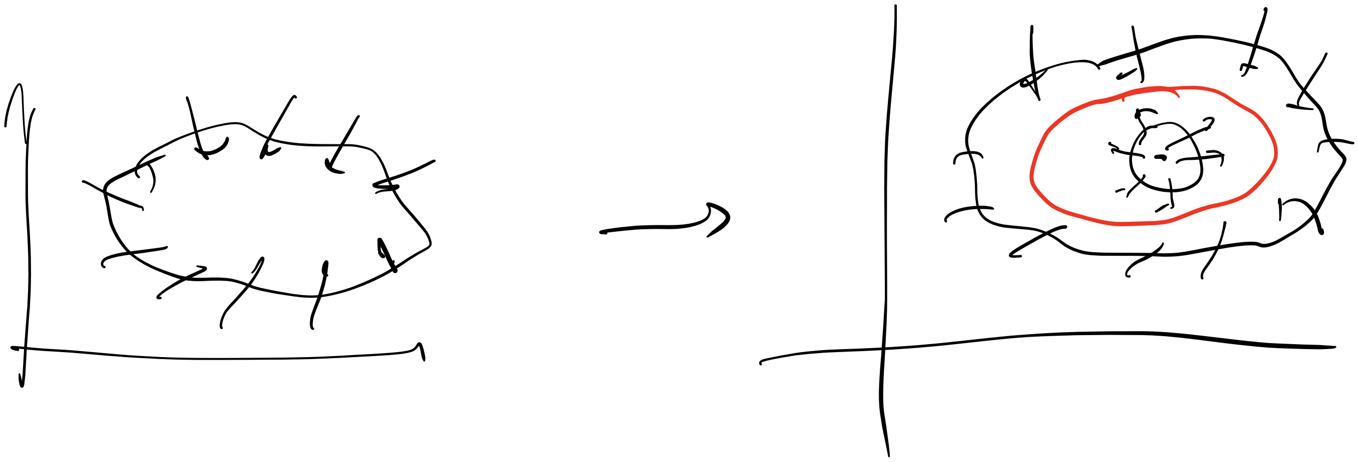
e quindi è arbitrariamente piccola



$\text{dist}(\varphi^T(x), \gamma)$

$\downarrow$

$\text{dist}(y, x_j)$



$\begin{cases} \dot{x} = \text{—} \\ \dot{y} = \text{—} \end{cases}$

$\mathbb{R}^2$

$\underline{q} = (q_1 - q_N)$

$\underline{p} = (p_1 — p_N)$