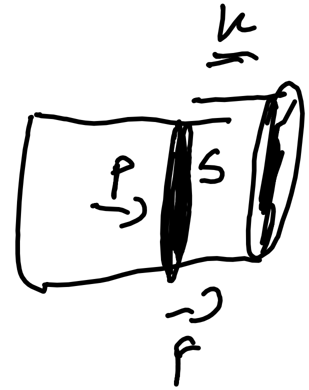
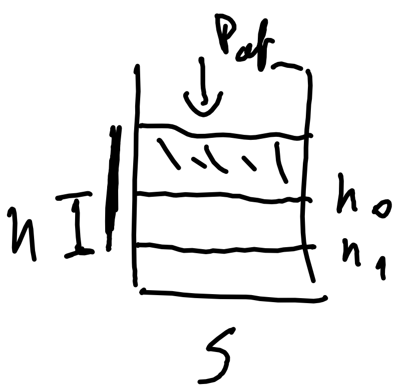
Fluidi (statica/dinamica)

$$P = \frac{dF}{dS} \Rightarrow P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S$$

$$\mathcal{L} = \int F \cdot dx = \int_{V_0}^{V_f} P \cdot dV$$



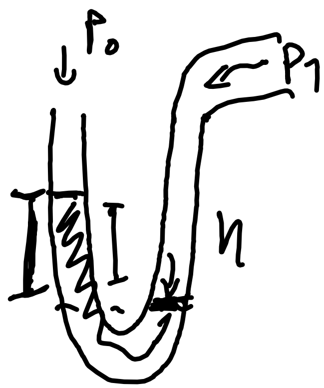


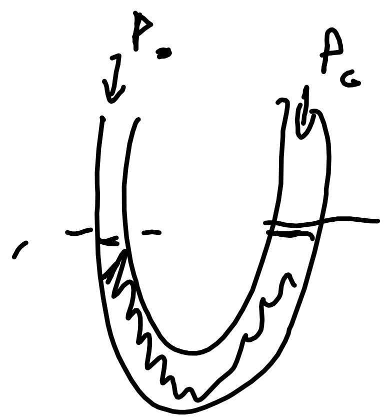
$$F = -mg = -\rho S h g$$

$$\begin{cases} P(h_0)\cancel{S} = \rho \cancel{S} h_0 g \\ P(h_1) = \rho h_1 g \end{cases}$$

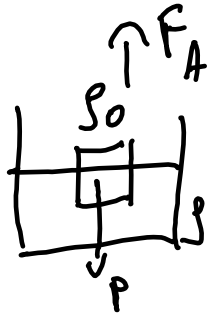
$$P(h_1) - P(h_0) = \rho(h_1 - h_0)g$$

$$\boxed{P(h_1) = P(h_0) + \rho g h}$$

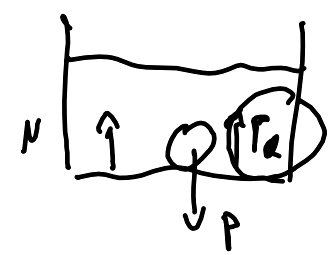


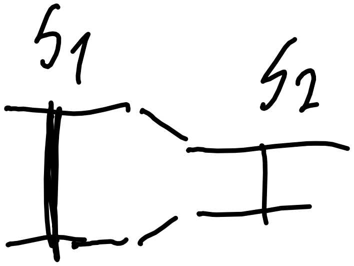


$$P_0 + \rho g h = P_1 \Rightarrow h = \frac{P_1 - P_0}{\rho g}$$



$$-\rho_0 V_{Tot} \cancel{g} + V_{in} \rho \cancel{g} = 0$$



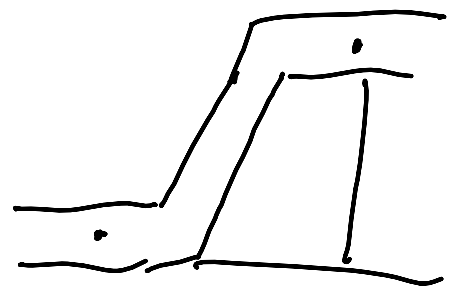


$$\varphi = v S = \text{cst}$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

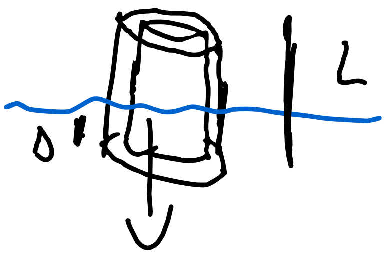
Bernoulli

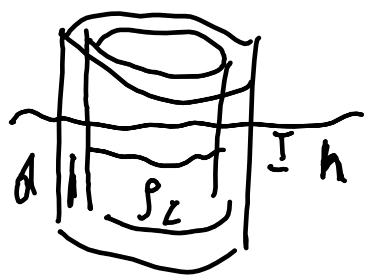
$$\boxed{P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{cst}}$$

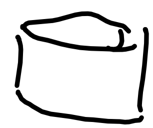


Esercizio 1 (principio di Archimede)

Un contenitore cilindrico cavo, avente raggio interno Ri=5.7 cm, raggio esterno Re=6cm e altezza L=80 cm, è immerso per una certa lunghezza in acqua (densità ρ=1 g/cm^3).
All'interno del cilindro viene versato un liquido di densità ρ_c. Il liquido raggiunge un'altezza d=10 cm. Con l'aggiunta del liquido il volume immerso del cilindro aumenta di h=8 cm.
Calcolare:
a) la densità del liquido
b) se inizialmente il cilindro è immerso di s=50 cm, calcolare la densità ρ_m del cilindro





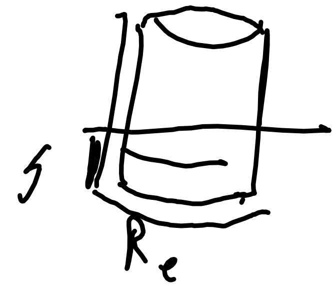


$$-\rho_L \pi R_i^2 d \cancel{- \rho \pi R_e^2 s + \rho \pi R_e^2 s} + \rho \pi R_e^2 h = 0$$

$$\begin{cases} +mg - \rho \pi R_e^2 s = 0 \\ -mg - \rho_L \pi R_i^2 d + \rho \pi R_e^2 (s+h) = 0 \end{cases}$$

$$= \rho_L \pi R_i^2 d - \cancel{\rho \pi R_e^2 s} + \cancel{\rho \pi R_e^2 s} +$$

$$\rho \pi R_e^2 h = 0$$



$$-\rho_L \cancel{\pi} R_i^2 d + \rho \cancel{\pi} R_e^2 h = 0$$

$$\rho_L = \frac{\rho R_e^2 h}{R_i^2 d}$$

$$V_{ext} = \pi R_e^2 \cdot L$$

$$V_{int} = \pi R_i^2 \cdot L$$

$$V_{ext} - V_{int} = \pi L (R_e^2 - R_i^2)$$

$$-m\cancel{g} + \rho \underbrace{\pi R_e^2 s} \cancel{g} = 0$$

$$m = \rho_e \pi L (R_e^2 - R_i^2)$$

$$-\rho_e \cancel{\pi} L (R_e^2 - R_i^2) + \rho \cancel{\pi} R_e^2 s = 0$$

Esercizio 2

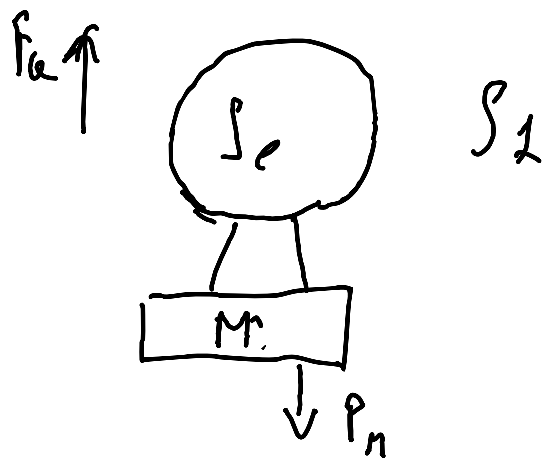
Un blocco di ghiaccio di volume V viene posto in un recipiente contenente acqua e si misura il livello h rispetto al fondo. Se il ghiaccio fonde completamente, di quanto varia il livello dell'acqua?

$$\rho_g V_{Tot} \cancel{g} = \rho V_{in} \cancel{g} \qquad V_{in} = \frac{\rho_g}{\rho} V_{Tot}$$

$$m = \rho_g V_{Tot} = \rho V_{in} \Rightarrow V_{in} = \frac{\rho_g}{\rho} V_{Tot}$$

Esercizio 3 (Pallone idrostatico)

Un pallone idrostatico di volume $V=2*10^3\ m^3$ è riempito con aria calda di densità $\rho_c=0.95\ kg/m^3$. All'esterno l'aria fredda ha una densità $\rho_f=1.35\ kg/m^3$. Qual è il carico massimo M che il pallone può sollevare?



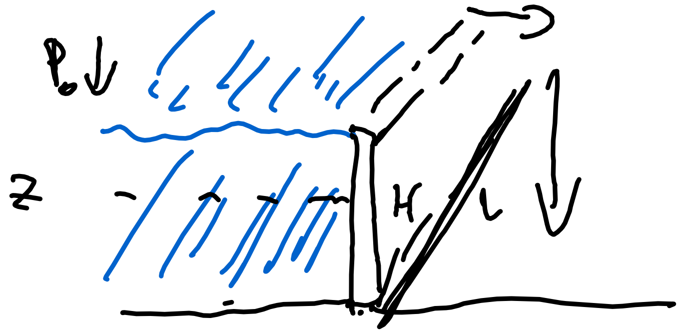
$$\Sigma F = ma = 0$$

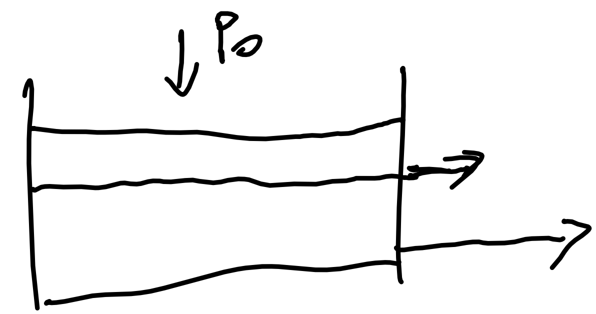
$$-M\cancel{g} - \underline{\rho_c} V \cancel{g} + \rho_f V \cancel{g} = 0$$

$$\boxed{M = V(\rho_f - \rho_c)}$$

Esercizio 4 (diga)

Una parete larga L e alta H, separa una massa d'acqua dall'ambiente. Quanto vale la forza F a cui è sottoposta la parete?





$$P_{Tot} = (P_0 + \rho g z) - P_0 \Rightarrow \rho g z L = dF$$

$$F_{Tot} = \int_0^H \rho g z L \, dz = \rho g L \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^H = \rho g L \frac{H^2}{2}$$

$$P_{Tot} = P_0 - P_0 + \rho g H$$

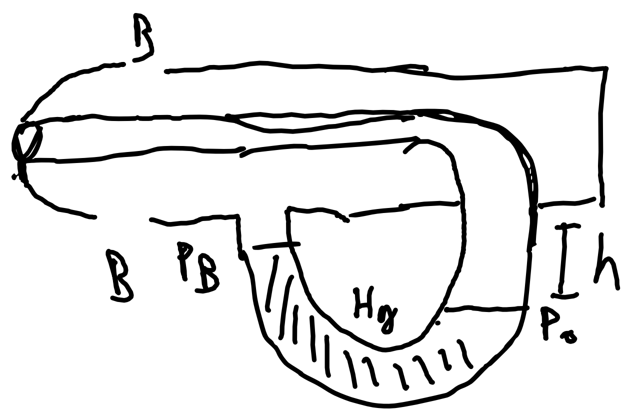
$$F = \boxed{\rho g H L}$$

Esercizio 5 (Tubo di Pitot)

Per misurare la velocità degli aerei si usa il sistema mostrato in figura costituito da un tubo nel quale sono praticati due fori O e B (tubo di Pitot). Il tubo rappresenta un ostacolo alla corrente fluida. In queste condizioni, se si prendono due sezioni A e B, a sufficiente distanza dall'ostacolo, la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, quindi applicando il teorema di Bernoulli: $p_A+1/2\ \rho\ v^2_A= \ p_B+1/2\ \rho\ v^2_B=p_{O.}$

Utilizzando la formula precedente, calcolare la velocità del fluido (o del tubo) in funzione della differenza di pressione tra i punti O e B.

Un tubo di Pitot (in figura) è montato su un aereo. In fase di decollo il manometro a mercurio (densità mercurio ρ_{Hg}=13.6*10^3 kg/m^3) installato nel tubo segnala un dislivello h=5 cm. Calcolare la velocità dell'aereo.



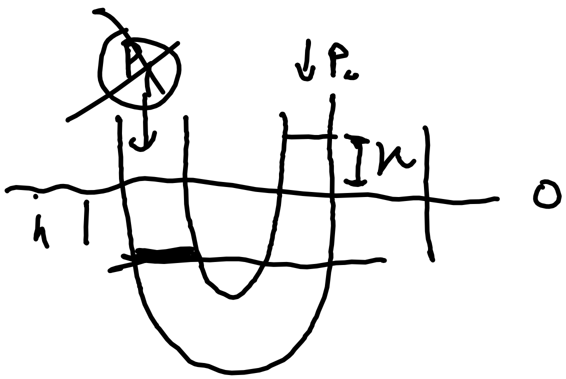
Esercizio 6 (oscillazioni)

Un tubo a U con sezione costante (S=1 cm^2), disposto verticalmente, contiene una massa m di acqua che occupa una lunghezza L= 1 m. In uno dei due rami il livello dell'acqua viene abbassato di h=10cm al di sotto della posizione di equilibrio con un'opportuna pressione costante. All'istante t=0 s la suddetta pressione viene annullata. Calcolare:

a) l'equazione del moto della massa m di acqua.

b) calcolare nuovamente l'equazione del moto della massa d'acqua supponendo che ci sia una forza di attrito proporzionale alla velocità con costante λ=0.6 kg/s.

$\boxed{\rho = 0{,}6\ kg/s}$



$$P_0 + 2\rho g h = P_1$$

$$F = -2\rho g h S$$

$$h = \frac{-P_0}{2\rho g} \Rightarrow P_0 = -2\rho g h$$

$$F = -2\rho g x s$$

$$F = ma \Rightarrow -\frac{2\rho g s}{m} x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{2\rho g \cancel{s}}{\cancel{\rho} \cdot L \cdot \cancel{s}} = \frac{2g}{L} = \omega^2$$

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x''$$

$$a x'' + b x' + c x = 0$$

$$\rightarrow a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = i\left(\sqrt{\Delta}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\alpha \pm i\beta$$

$\Delta > 0 \quad \lambda_1, \lambda_2$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow$$

$\Delta = 0 \quad x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \qquad \lambda_1 = \lambda_2$

$\Delta < 0 \quad \cancel{x} = e^{\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right]$

$\rightarrow x(t) = e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]$

$\rightarrow \boxed{x(t) = e^{\alpha t}[A \sin(\beta t + \varphi)]}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

$\lambda = \alpha \pm i\beta$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x'' = -\omega^2 x$$

$t = 0$

$x = 0{,}1\ m$

$v = 0\ m/s$

Verifica soluzione

$$x' = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x'' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $x(0) = 0{,}1 \text{ m}$

$x'(t) = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $x'(0) = 0 \text{ m/s}$

$x'(0) = 0 = A\,\omega \cos(\varphi)$. $\qquad$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$x(0) = 0{,}1 = A$

$x(t) = 0{,}1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \cos(\omega t)$

$\frac{2g}{L} = \omega^2 \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$a = -\frac{2\rho g S}{m} x - \frac{\eta}{m} v \Rightarrow a = -\omega^2 x - 2\gamma v$$

$$\frac{2\rho g S}{m} \to \omega^2 \qquad \frac{\eta}{m} \to 2\gamma$$

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2 = 4(\gamma^2 - \omega^2)$$

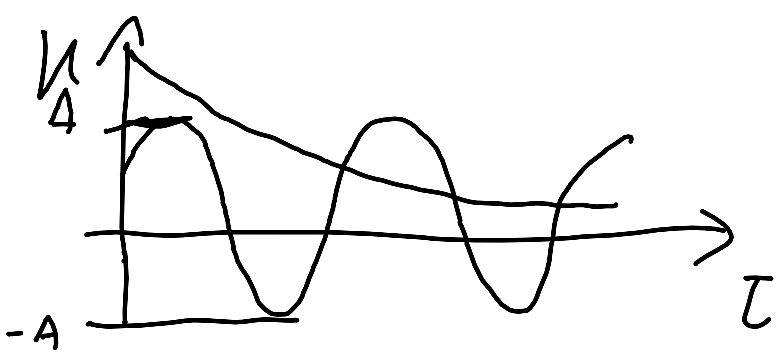
$$\lambda_{1/2} = \frac{-\cancel{2}\gamma \pm \sqrt{4(\gamma^2 - \omega^2)}}{\cancel{2}}$$

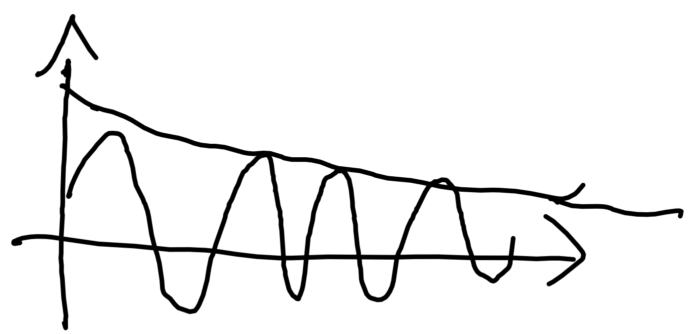
$$\lambda_{1/2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4(\gamma^2-\omega^2)}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{(\gamma^2-\omega^2)}_{-\omega'^2}}$$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = \overset{\alpha}{-\gamma} \pm \overset{\beta}{i\omega'}}$$

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[A \sin(\beta t + \varphi)\right]$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A \sin(\omega' t + \varphi)\right]$$





$a = -\frac{A}{m} x \Rightarrow \boxed{a = -w^2 x}$

$A \sin(wt + \varphi)$

$a = -w^2 x \pm 2\gamma v$ $\qquad e^{+\gamma t}$