

PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA  
A.A. 2011/2012

14 gennaio 2013

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐ 6 CFU      ☐ 9 CFU

**Note:** Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

**IMPORTANTE:** coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

Esercizio  
di profetto

### Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

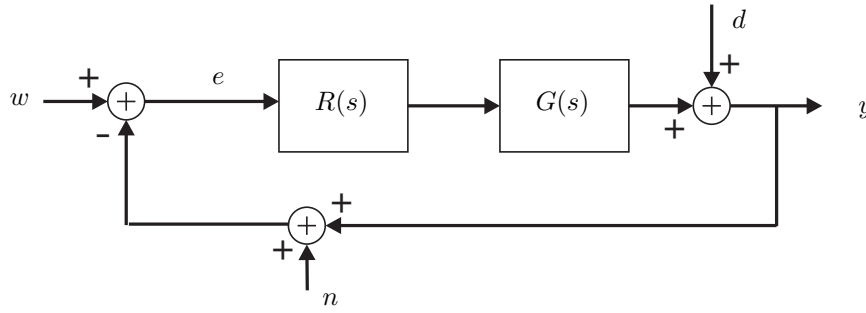


Figura 2: Progetto di un regolatore.

dove  $G(s) = 2 \cdot \frac{(1 + 10s)}{(1 + s)^2}$

**Domanda 5.1.** Utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi la carta logaritmica alla pagina seguente), si progettino un regolatore  $R(s)$  **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo nella risposta (a ciclo chiuso) allo scalino unitario  $w(t) = 1(t)$
- supponendo che il disturbo  $d(t)$  sia descrivibile come

$$d(t) = D \sin(\omega t) \quad \omega \in \left[ \frac{1}{10}, \frac{1}{2} \right] \text{ rad/s} \quad D > 0$$

l'uscita a regime a ciclo chiuso a fronte del solo disturbo  $d(t)$  (con tutti gli altri ingressi posti a zero) possieda ampiezza non superiore a  $\frac{D}{5}$ .

- supponendo che il rumore  $n(t)$  sia descrivibile come

$$n(t) = N \sin(\omega t) \quad \omega \in [20, 200] \text{ rad/s} \quad N > 0$$

il rumore a regime in uscita a ciclo chiuso sia attenuato almeno di un fattore 10, cioè l'ampiezza dell'uscita a regime a ciclo chiuso quando sia applicato il solo rumore  $n(t)$  (con tutti gli altri ingressi posti a zero) sia inferiore a  $\frac{N}{10}$ .

# Analisi delle specifiche

- ① il sistema a ciclo chiuso deve essere "tip 1"  $\rightarrow$  in  $R(s)$  va inserita una integrale  $\frac{K_R}{s}$   
perché non c'è polo in  $s=0$  in  $G(s)$

②  $\forall \omega \in \left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right] \quad |S(j\omega)| < \frac{1}{5}$

$$|S(j\omega)|_{dB} < -20 \log 5 \approx -14$$

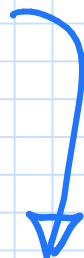
Come si impone questo vincolo di attenuazione del disturbo?

Devo ricordare che:

$$|S(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \forall |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

[FA Parte 3 #30]

Allora la specifica si traduce in



per  $\omega \in \left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$  → per attenuare il  
disturbo dove  
ovvero  $\omega_c > \frac{1}{2}$ !

ma  $|S(j\omega)|_{dB} = -|L(j\omega)|_{dB}$

quindi

$$|L(j\omega)|_{dB} > 14dB \quad \omega \in \left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$$

- ③ In tecnica analogica, l'attenuazione del rumore di misura è possibile solo se il rumore ha componenti a frequenze esterne all'intervallo  $[0, \omega_c]$ !

Inoltre la FFT del rumore  $M$  ed unitaria vale  $-F(s)$ .

La specifico allora riguardando  $|F(j\omega)|$ :

$$\text{per } \omega \in [20; 200] \quad |F(j\omega)| < \frac{1}{10}$$



allora:

$$|F(j\omega)|_{dB} < -20dB$$

Ricordando che:

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \text{per } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

[PA Parte 3 #59]

allora la specifica diventa

$$\text{per } \omega \in [20 \quad 200]$$

$$|F(j\omega)|_{dB} < -20dB$$

↓

$$|L(j\omega)|_{dB} < -20dB$$

$$L(s) = \frac{2(1+10s)}{(1+s)^2} \cdot \frac{\mu_R}{s}$$

$$p_1 = 0 \quad \omega_{p_1} = 0$$

$$z_1 = -\frac{1}{10} \quad \omega_{z_1} = \frac{1}{10}$$

$$p_2 = -1 \quad \omega_{p_2} = +1$$

1° tratto della  
spettro del modulo:  $\omega \in [0; \frac{1}{10}]$

$q=1 \Rightarrow$  retta a pendenza  $-20\text{dB/decade}$   
per  $\omega=1$  partirebbe da  $20\log_{10}(2\mu_R)$

Per  $\omega = \frac{1}{10} \rightarrow$  partirebbe da

$$20\log_{10}(2\mu_R) + 20 = M_{0,1}$$

Profondo di ris  $\geq 14\text{dB}$

$$20\log_{10} 2 + 20\log_{10} \mu_R + 20 \geq 14$$

$$20\log_{10} \mu_R \geq -6 - 6,02 = -12,02$$

$$20\log_{10} \mu_R > -12$$

$$\log_{10} \mu_R > -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}$$

$$\mu_R > 10^{(-\frac{3}{5})} \approx 2,512 \cdot 10^{-1}$$

Per es.  $\mu_R = \frac{1}{2} \Rightarrow M_{0,1} = +20$

2° tratto della risposta:  $\omega \in [\omega_{z1}; \frac{\omega}{P_2 P_3}]$

tratto orizzontale  $\rightarrow$  modulo costante  $M_{0,1}$

3° tratto della risposta:  $\omega \in [\frac{\omega}{P_2 P_3}; +\infty)$

semiretta a pendenza  $-40 \text{ dB/decade}$

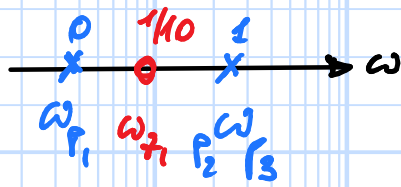
per  $\omega=1 \rightarrow M = +20 \text{ dB}$

per  $\omega=10 \rightarrow M = +20 - 40 = -20$

Soddisfa i requisiti di progetto



disegnare di Zade sintetico



$$\mu_R = 1/2$$

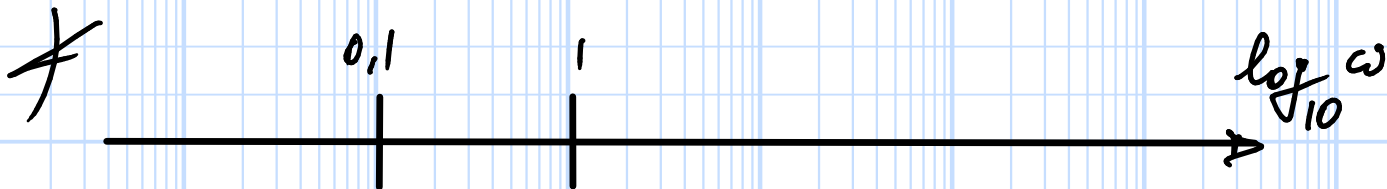
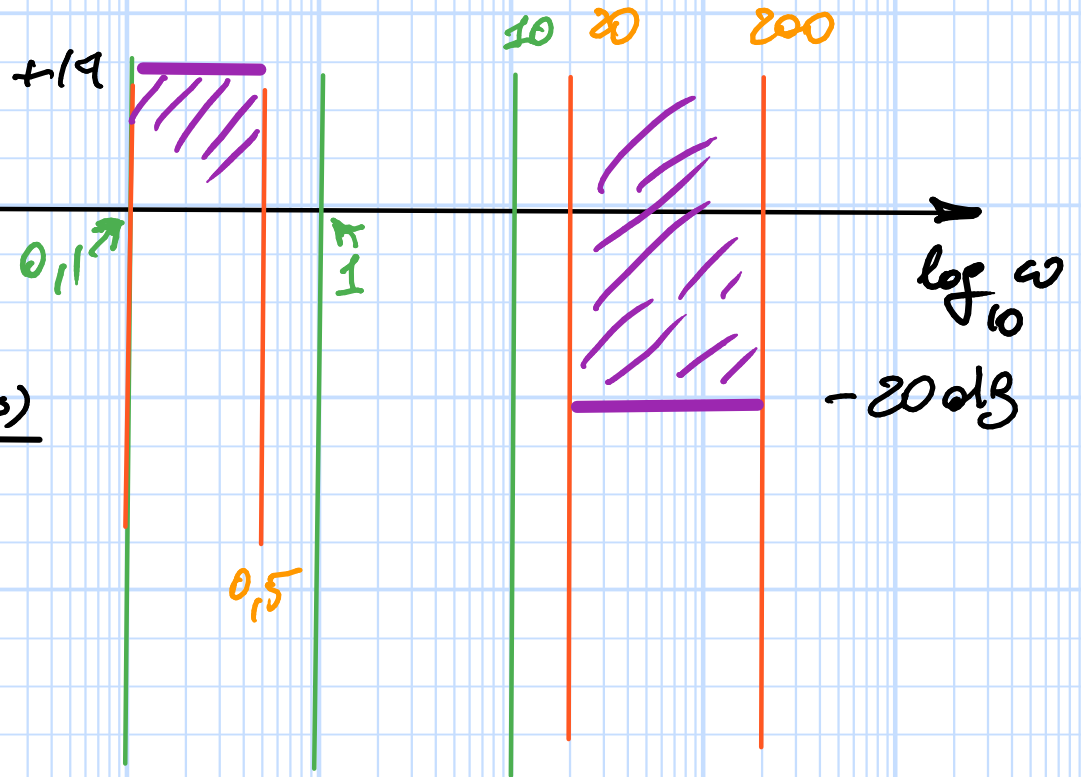
$$L(s) = \frac{2\mu_R}{s} \frac{1+10s}{(1+s)^2}$$

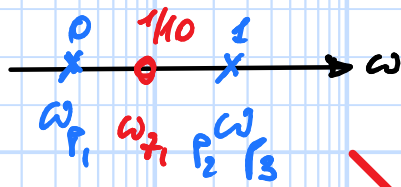
$$| \cdot |$$

$$+20dB$$

$$R_s(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

$$G(s) = \frac{2(1+10s)}{(1+s)^2}$$





$$\mu_R = 1/2$$

$$L(s) = \frac{2\mu_R}{s} \frac{1+10s}{(1+s)^2}$$

$$| \cdot |$$

$$+20dB$$

(-1)

(0)

(-2)

+19

10

20

200

0dB

0,1

1

$\log_{10} \omega$

-20dB

$$R_s(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

$$G(s) = \frac{2(1+10s)}{(1+s)^2}$$

0,5

$\neq$

0,1

0°

$\log_{10} \omega$

-90°

-180°

$$\omega_c = ?$$

$$\varphi_m = ? \quad k_m = ?$$

$$L(s) = \frac{1+10s}{s(1+s)^2}$$

$$\text{for } \omega = 1$$

$$M_{dB} = +20dB$$

$$\omega_c = ?$$

$$0 = +20 - 40 \left[ \log_{10}(\omega_c) - \log_{10}(1) \right]$$

$$| = 20 - 40 \log \omega_c$$

$$\log_{10} \omega_c = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_c = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = \arg(1+10j\sqrt{10}) - \arg(j\sqrt{10}) +$$

$$-2 \arg(1+j\sqrt{10})$$

$$= \arctan(10\sqrt{10}) - 90^\circ +$$

$$-2 \arctan(\sqrt{10}) =$$

$$\approx -147^\circ$$

$$\varphi_m = \varphi_c + 180^\circ = 33^\circ //$$

$$\varphi_m \rightarrow +\infty \quad \leftarrow \begin{cases} | \cdot | \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0 \\ \neq \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -180^\circ \end{cases} //$$

Determinare

una soluzione

diretta

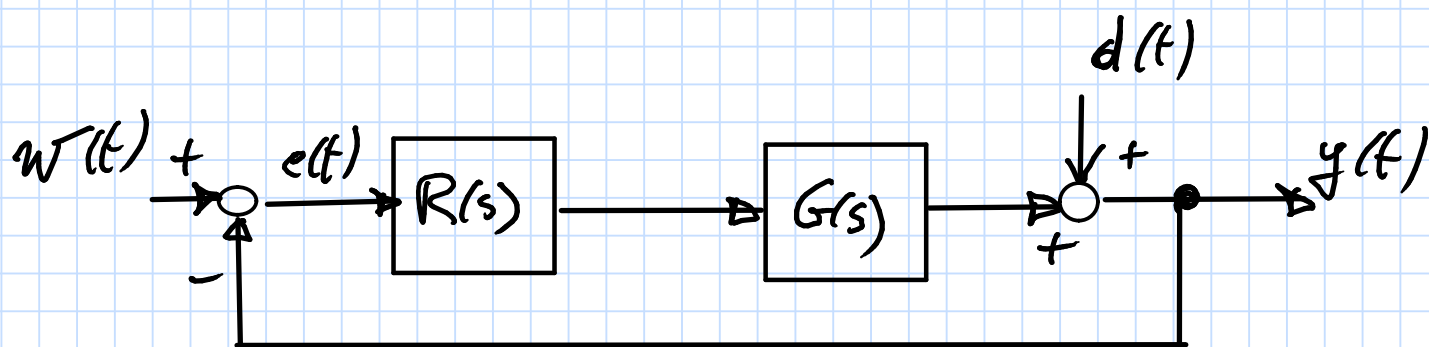
per esempio

# Prova d'esame del 18/07/2019

Dato il processo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{1+10s} \cdot e^{-2s}$$

inserito nello schema a blocchi



determinare un regolatore  $R(s)$  fisicamente realizzabile che garantisca il soddisfacimento delle specifiche seguenti:

(a)  $e_{ss} \rightarrow 0$  per  $w(t) = A \cdot 1(t)$   $A, B \in \mathbb{R}$   
 $d(t) = B \cdot 1(t)$

(b) si consideri  $d \equiv 0$ ; si vuole  $\omega_c \geq \frac{1}{2} \text{ rad/s}$

(c) sempre per  $d \equiv 0$ , si vuole  $\varphi_m \geq 30^\circ$

# Soluzioni

$$G(s) = \frac{10}{1+10s}$$

$$\hat{G}(s)$$

$$e^{-2s}$$

non influisce  
su (a), (b)

MA influisce su (c)

$$|G(j\omega)| \equiv |\hat{G}(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \hat{G}(j\omega) + \angle e^{-2j\omega}$$

Risolvere in questo modo:

(•) utilizzare  $\hat{G}(j\omega)$  per imporre il soddisfacimento di (a)

(•) utilizzare  $\tilde{G}(j\omega)$  per imporre (b)

NB (b) è un vincolo su  $\omega_c$   
esistono molte possibili scelte  
di  $\omega_c$  che rispettano il vincolo

(•) per scegliere  $\omega_c$  in modo che valga anche  
(c) devo utilizzare  $\angle G(j\omega)$

Supponiamo che  $\bar{\omega}$  soddisfi (b)

Allora  $\varphi_c = \angle G(j\bar{\omega}) = \angle \hat{G}(j\bar{\omega}) + \angle e^{-2j\bar{\omega}}$

$$= \varphi_c^1 - 2\bar{\omega} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (*)$$

Quanto vale  $\varphi_m = ?$

$$\varphi_m = \varphi_c + 180^\circ = \varphi_c^1 - 2\bar{\omega} \cdot \frac{180}{\pi} + 180^\circ$$

$\varphi_m^1$        $\Delta\varphi$

Allora  $\varphi_m = \varphi_m^1 - \Delta\varphi$

Da (c):  $\varphi_m \geq 30^\circ \Leftrightarrow \varphi_m^1 - \Delta\varphi \geq 30^\circ$

questo risultato  $\Rightarrow \varphi_m^1 \geq 30^\circ + \Delta\varphi(\bar{\omega}) \quad (c')$

vorrei a risolvere tutto il progetto utilizzando  $\hat{G}(s)$ , purché la specifica (c) sia modificata in (c')

$$(a) \quad e_{ss} \rightarrow \infty \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

(b) conviene semplificare il problema cancellando la dinamica di  $\hat{G}(s)$

$$R_2(s) = (1+10s)$$

$$R(s) = \mu_R \frac{1+10s}{s}$$

$$\hat{L}(s) = R(s) \cdot \hat{G}(s) = \mu_R \frac{\cancel{1+10s}}{s} \cdot \frac{10}{\cancel{1+10s}}$$

$$= 10 \frac{\mu_R}{s}$$

$$\omega_c \geq \frac{1}{2}$$

A questo punto si richiede  $\omega_c$  inferiore che sia anche soddisfatta (c):

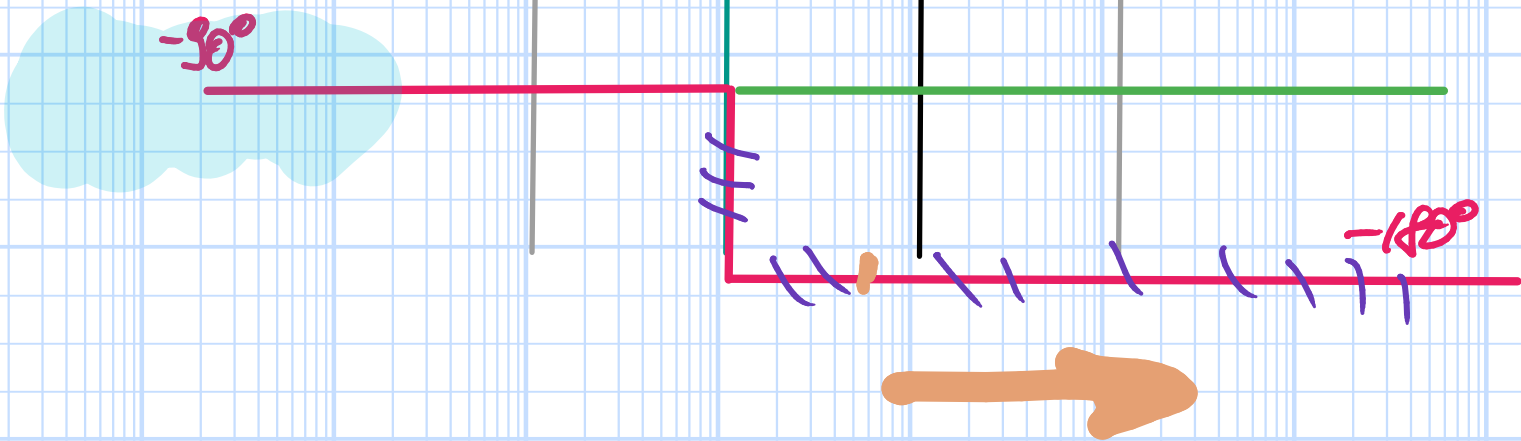
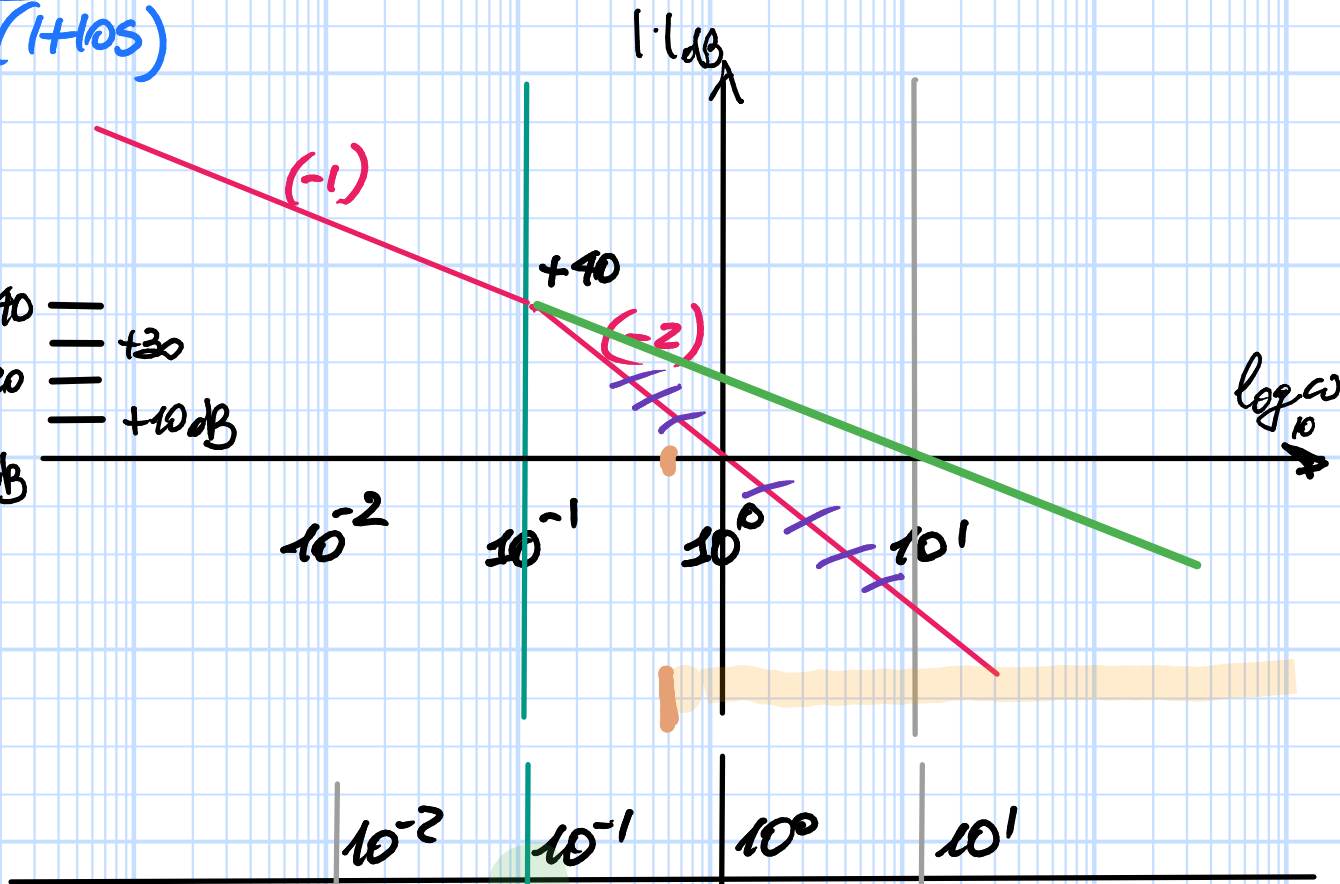
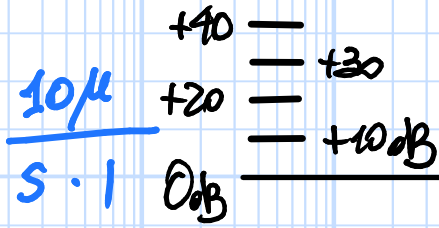
$$\begin{cases} \omega_c \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - 2\omega_c \geq -\frac{5}{6}\pi \end{cases} \rightarrow \text{lo userei } (*)$$

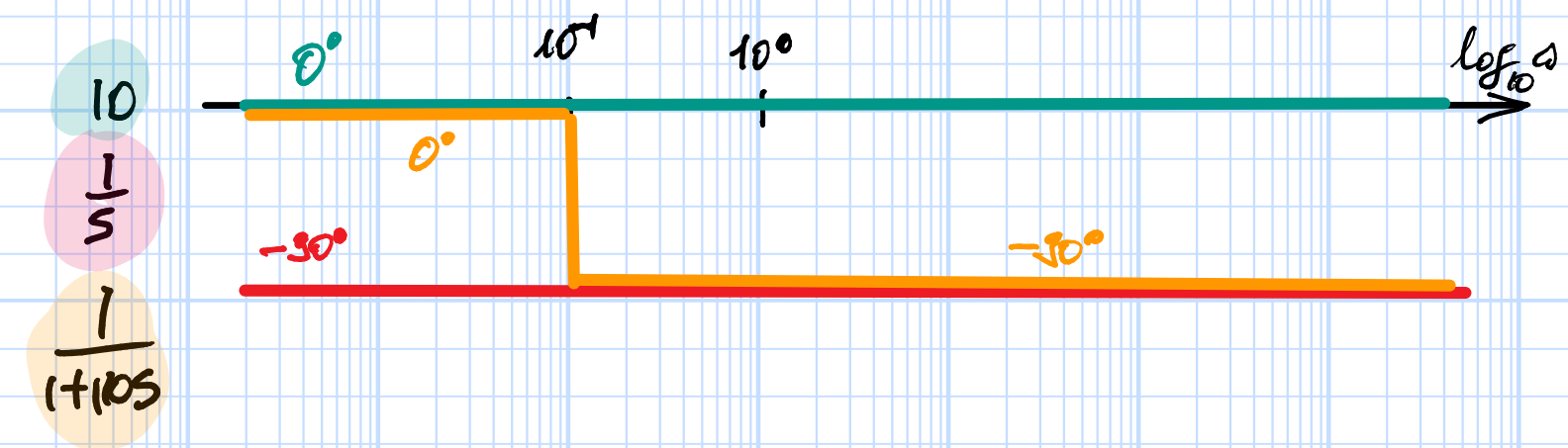
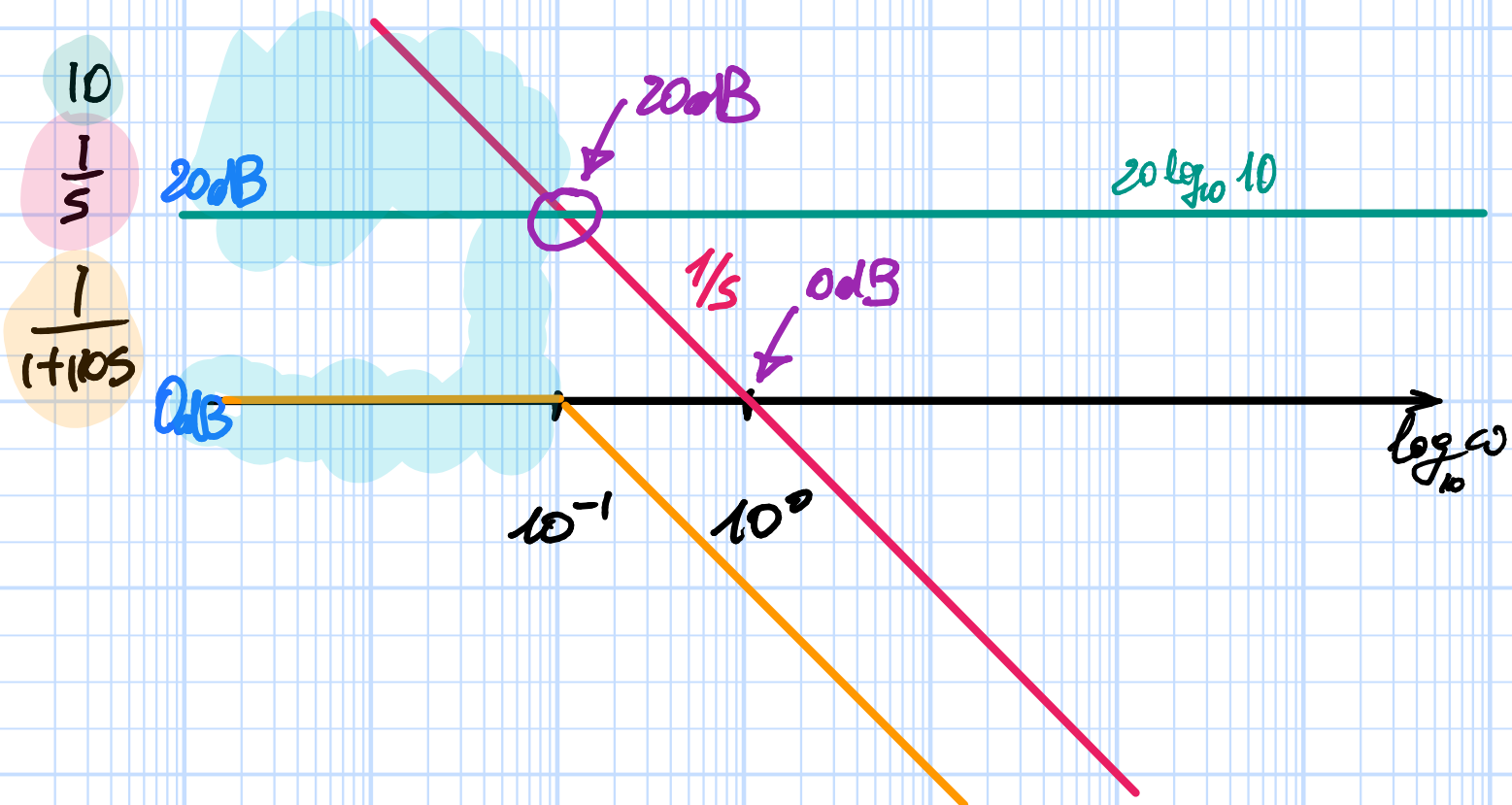
$$\begin{cases} \omega_c \geq \frac{1}{2} \\ 2\omega_c \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_c \geq 0,5 \\ \omega_c \leq \frac{\pi}{6} \approx 0,5236... \end{cases}$$

$$L'(s) = \frac{10\mu}{s(1+10s)}$$

$$\mu=1$$





$$\begin{cases} \omega_c \geq 0,5 \\ \omega_c \leq \frac{\pi}{6} \approx 0,5236... \end{cases}$$

B l'intervallo  
dei valori  
ammissibili  
per  $\omega_c$  ha  
dimensioni molto  
piccole

$$0,5 \leq \omega_c \leq \frac{\pi}{6}$$

per es.  $\bar{\omega}_c = 0,52$

$$|\hat{L}(j\bar{\omega}_c)| = 1 \iff \frac{10\mu_R}{0,52} = 1$$

$$\mu_R = 5,2 \cdot 10^{-2}$$

$$\varphi_c \approx -149^\circ 32'$$

$$\varphi_M \approx 30^\circ 27'$$

11 giugno 2021

**Nome e Cognome:**

**gruppo:**

Gruppo D

**esercizio:**

Esercizio 2 - 2 domande

**intervallo di tempo a disposizione:** 45 minuti

**Note:** Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

**Domanda 2.1.**

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:

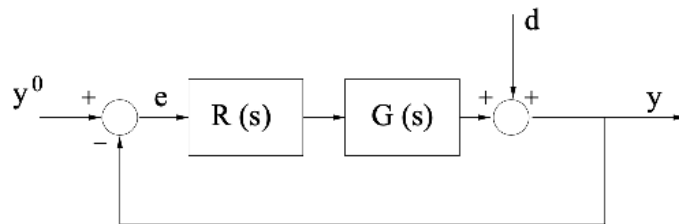


Figura 1: Progetto di un regolatore a tempo continuo.

dove

$$G(s) = 8 \cdot \frac{1 + 0.4s}{(1 + Ts)} \cdot e^{-Ls} \quad T \in [4, 8], \quad L \in [0.025, 0.5]$$

Posto  $d(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$  ed utilizzando i diagrammi asintotici di Bode, si progetti un regolatore  $R(s)$  **fisicamente realizzabile** in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche di progetto:

- errore a regime **nullo** nella risposta allo scalino unitario (a ciclo chiuso)

$$y^o(t) = 1(t) \implies e_\infty = 0$$

- margine di fase non inferiore a  $30^\circ$ :  $\varphi_m \geq 30^\circ$

*Traccia di soluzione*

B il modello del processo è affetto da incertezza su  $L$  e  $T$

Vi è determinato un regolatore  $R(s)$  che garantisce il soddisfacimento delle specifiche in qualsiasi caso

Vi è individuato il "caso peggiore":

se il ritardo finito  $\rightarrow \max L$

se il polo  $\rightarrow \max T$

perché sono "il caso peggiore"?

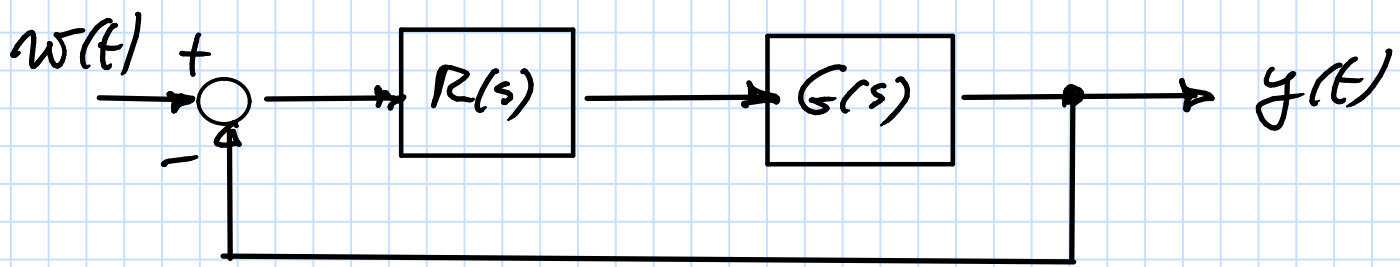
Nell'esercizio il "caso peggiore" è

$$G(s) = 8 \cdot \frac{(1+0,9s)}{(1+8s)} \cdot e^{-0,5s}$$

Terminare il progetto sulla fabbrica dell'esempio precedente

# Progetto di regolatore

Dato lo schema



con  $G(s) = \frac{10}{s(1+s)}$

determinare  $R(s)$  in modo da

- (a) sovraccaricamento nella risposta  
allo scalino unitario

$$\sigma_{\%} \leq 16\%$$

- (b)  $F(s)$  presenti una coppia di poli  
complessi coniugati dominante, con

$$\omega_n = 2 \text{ rad/s}$$

## Soluzione

(b)  $\omega_n = 2 \Rightarrow \omega_c \approx \omega_n \Rightarrow \omega_c = 2$   
coppia poli compl. conj.  $\rightarrow \varphi_m < 75^\circ$

$$\varphi_M < 45^\circ \Leftrightarrow \xi = \frac{\varphi_M}{100} < 0,75$$

$$(a) \quad \Delta_{\%} = 100 e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \leq 16$$

Risolvo per  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{100}{\Delta_{\%}}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{100}{\Delta_{\%}}\right)\right]^2}}$$

$$\Delta_{\%} \leq 16 \Rightarrow \xi \geq 0,5$$

In definitiva  $0,5 \leq \xi < 0,75$

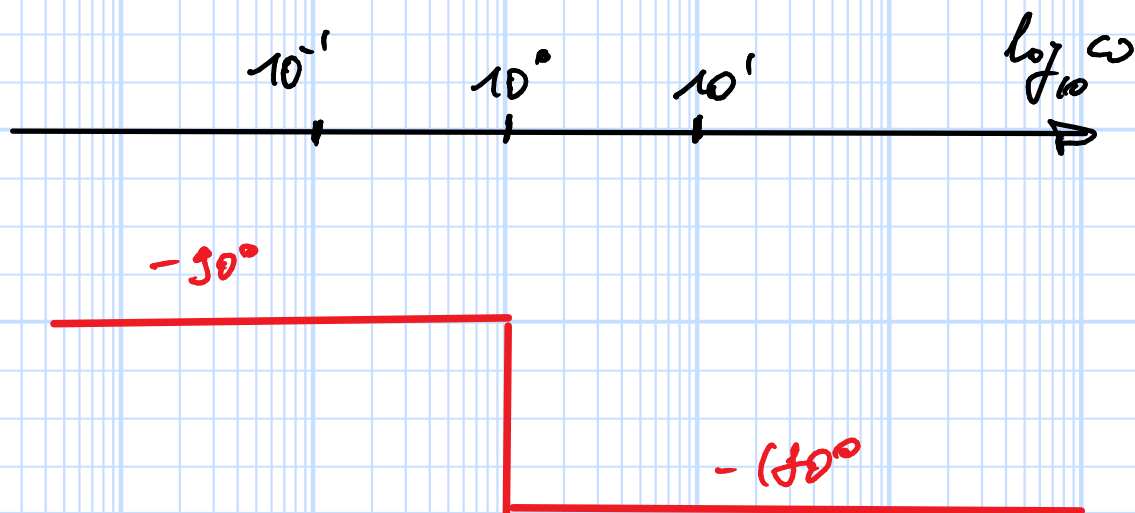
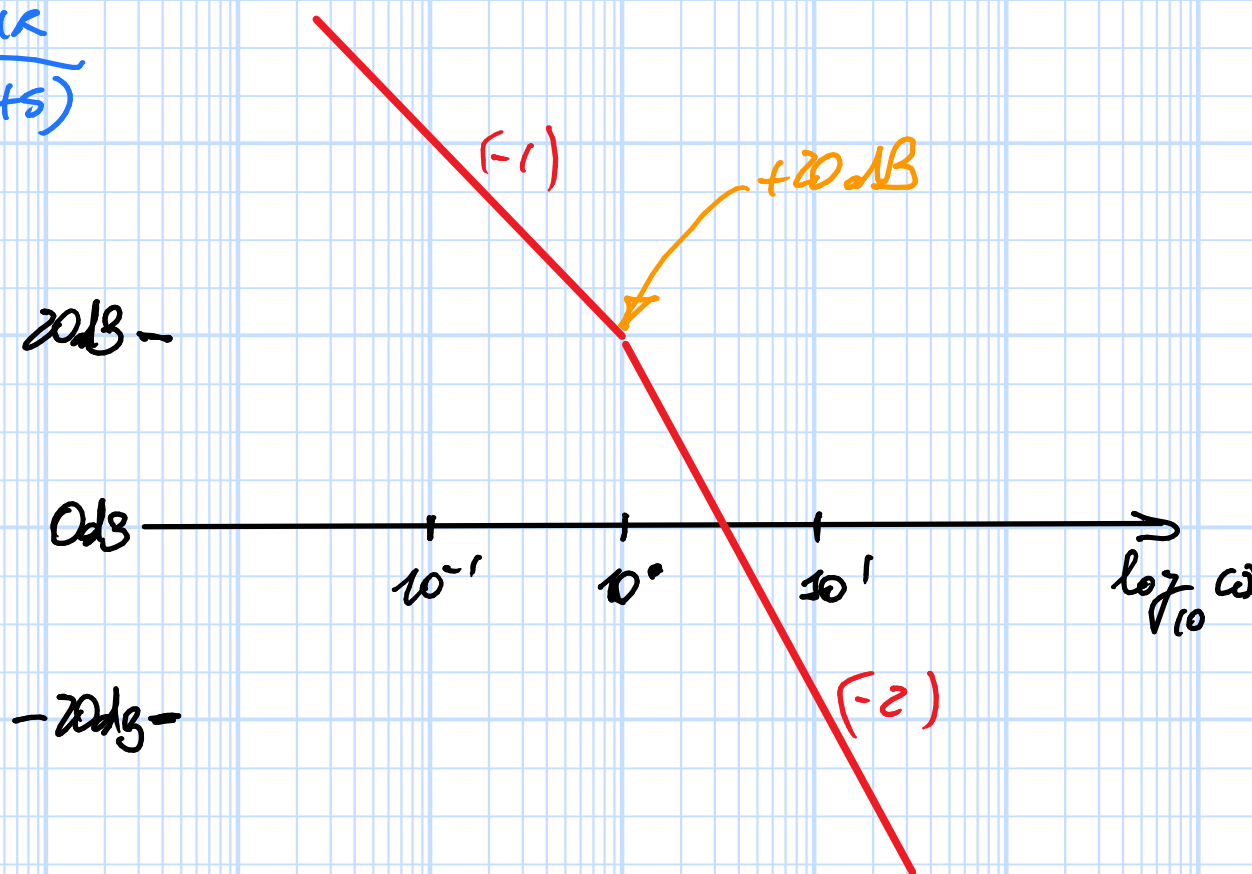
cioè

$$50^\circ \leq \varphi_M < 75^\circ$$

Questo è la nuova 1<sup>a</sup> risposta

Un regolatore puramente proporzionale risolve il problema?

$$L(s) = \frac{10 \mu K}{s(1+s)}$$



$$\omega_c = 2 \quad \mu_R > 0$$

$$\neq \mu_R G(j\omega) = ?$$

$$\begin{aligned} \neq \mu_R G(j\omega) &= 0^\circ - 90^\circ - \angle(1 + 2j) \\ &= -90^\circ - \arctan 2 \approx -157^\circ \end{aligned}$$

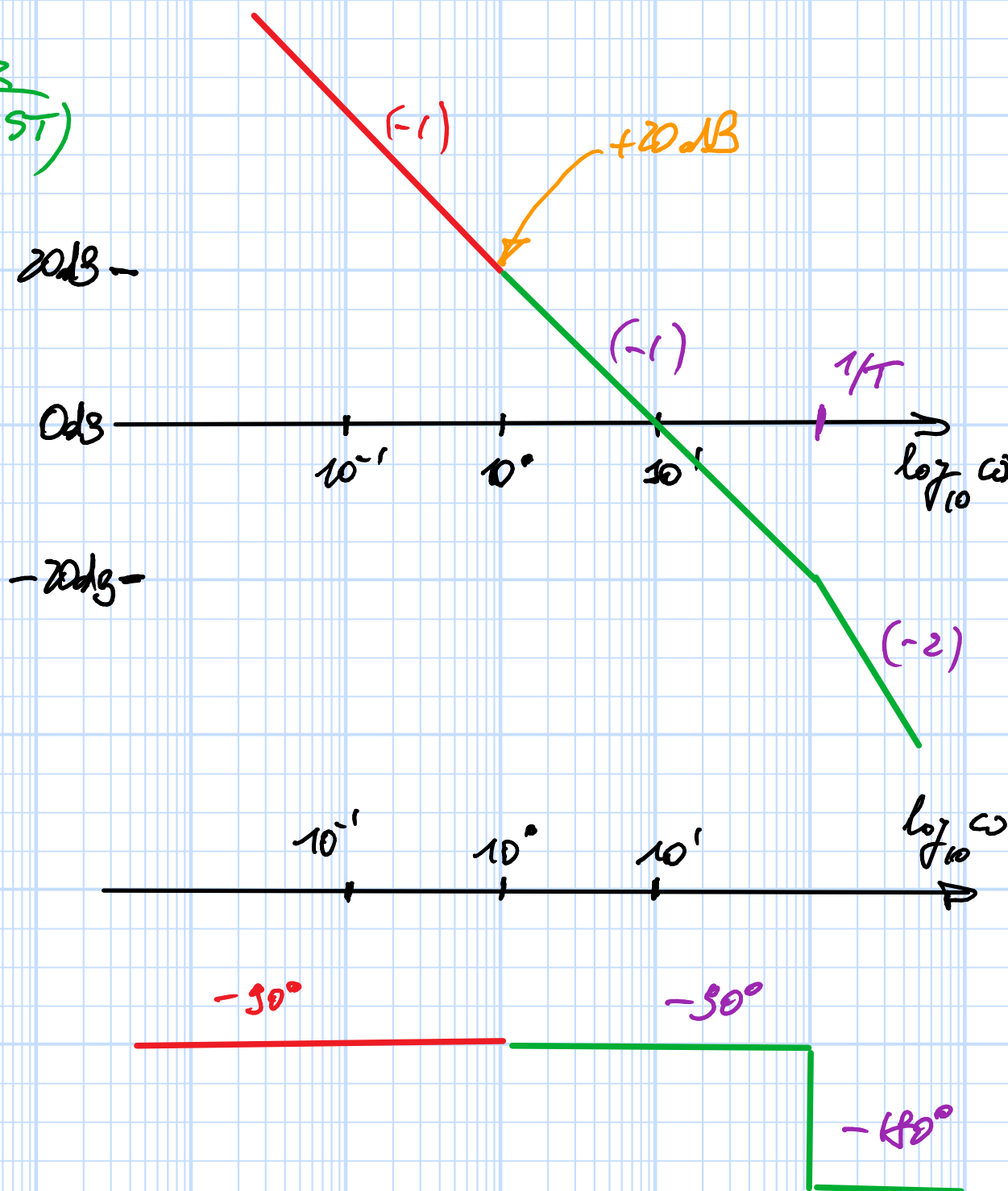
Ma allora  $\varphi_m \approx 26^\circ \neq 180^\circ$   
rectifiable!

Deve essere  $50^\circ \leq \varphi_m < 75^\circ$  !

Idea: modificare  $R(s)$  cancellando il polo in  $(-1)$  di  $G(s)$  ed inserendone uno a pulsazione più elevata;

$$R(s) = \mu_R \frac{1+s}{1+sT} \quad T \in \mathbb{R}^+$$

$$G_2(s) = \frac{10 \mu_R}{s(1+sT)}$$



Come determiniamo  $T$ ?

Impongo il soddisfacimento della specifica sulla fase:

$$L_2(s) = \frac{10K_R}{s(1+sT)}$$

da specifica  $\omega_c = 2$

$$\angle L_2(j2) = -120^\circ$$

così  $\varphi_M = 60^\circ$   
e soddisfo la  
specifica  
 $50^\circ \leq \varphi_M < 75^\circ$

$$\angle L_2(j2) = 0^\circ - 90^\circ - \arctan(2T) = -120^\circ$$

$$\arctan(2T) = +30^\circ$$

$$2T = \tan(30^\circ)$$

$$T = \frac{1}{2} \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

A partir disso resta só de determinar

$\mu_R$ :

$$|L_2(j\omega)| = 1$$

$$\frac{\cancel{10}^5 \mu_R}{\cancel{2}_1 |1 + \cancel{2}^1 j \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_3}|} = 1$$

$$\mu_R = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}}$$

$\approx 0,23$  //