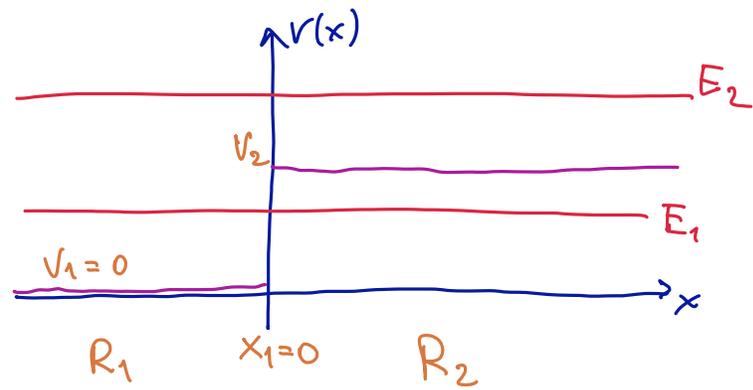


GRADINO DI POTENZIALE



Un solo pto di discontinuità: x_j ($j=1$).

\Rightarrow due regioni R_j ($j=1,2$) in

cui risolvere l'eq. di Schr.

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_j) \psi = 0 \quad j=1,2$$

$$R_1) \quad x \leq 0 \quad \psi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0 \quad p_1 = \sqrt{2mE}$$

$$\psi_1(x) = c_1^+ e^{ip_1 x/\hbar} + c_1^- e^{-ip_1 x/\hbar}$$

$$\psi_1'(x) = \frac{ip_1}{\hbar} c_1^+ e^{ip_1 x/\hbar} - \frac{ip_1}{\hbar} c_1^- e^{-ip_1 x/\hbar}$$

$$R_2) \quad x \geq 0 \quad \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2) \psi_2 = 0 \quad p_2 = \sqrt{2m(E - V_2)}$$

$$\psi_2(x) = c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar}$$

$$\psi_2'(x) = \frac{ip_2}{\hbar} c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} - \frac{ip_2}{\hbar} c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar}$$

Condiz. di ricordo

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) \end{cases} \quad \text{Sist. lineare}$$

Condiz. di limitatezza?

$E = E_2 > V_2 \rightsquigarrow p_1 \text{ e } p_2 \in \mathbb{R}$, ψ_1 e ψ_2 sono oscillanti e quindi polinomiali lim. a $+\infty$ e $-\infty$ \rightarrow non ci sono condiz. da imporre

$E = E_1$ con $0 < E_1 < V_2 \rightsquigarrow p_1 \in \mathbb{R}$, ma $p_2 = i\sqrt{2m|E-V_2|} \in i\mathbb{R} \equiv iq_2$ $q_2 \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \psi_2(x) = c_2^+ e^{-q_2 x/\hbar} + c_2^- e^{q_2 x/\hbar}$$

questa non è pol. lim. a $+\infty$
 \Rightarrow bisogna imporre $c_2^- = 0$

Consideriamo prima $E = E_2 > V_2$: ($p_1, p_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) \end{cases}$$

Sist. lineare di due eq. in 4 incognite \rightsquigarrow la soluz. ci permette di ricavare due di esse in funt. delle altre due (2 param. liberi)

soluz. gen. dell'eq. diff. \leftarrow
lin. del 2° ord. in ψ

Noi sappiamo che se ψ è soluz., allora anche ψ^* è soluz. e se ψ è complessa allora ψ^* e ψ sono due soluz. indipendenti \Rightarrow ogni altra soluz. è una comb. lin. di ψ e ψ^*

\Rightarrow ci basta trovare una soluz. particolare di $\psi'' + \frac{2m(E-V(x))}{\hbar^2} \psi = 0$ e poi prender il suo complesso coniugato.



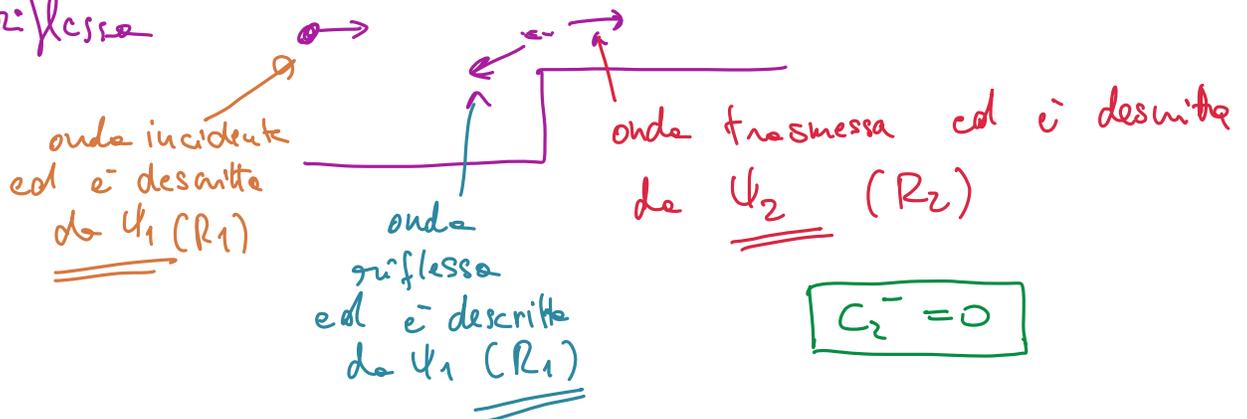
Cerchiamo una soluz. particolare con $C_2^- = 0$

$$\begin{cases} \psi_1 = c_1^+ e^{i k_1 x / \hbar} + c_1^- e^{-i k_1 x / \hbar} \\ \psi_2 = c_2^+ e^{i k_2 x / \hbar} + c_2^- e^{-i k_2 x / \hbar} \end{cases}$$

← onde che va verso destra
+ onde che va verso sinistra

↳ comb. di onde piane

Vogliamo interpretare la soluz. particolare come descrivendo un processo di urti in cui una particella arriva da sinistra unita con il gradino di potenziale e con una certa prob. di essere trasmessa e una di essere riflessa



Quindi, risolviamo il sist. lin. con $C_2^- = 0$:

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2 c_2^+ \end{cases}$$

risolviamo nelle incognite c_1^- e c_2^+

$$\begin{cases} p_2 (c_1^+ + c_1^-) - p_1 (c_1^+ - c_1^-) = 0 \\ p_1 c_1^+ + p_1 c_1^- = (p_1 + p_2) c_2^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^- = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} c_1^+ \\ c_2^+ = \frac{2p_1}{p_1 + p_2} c_1^+ \end{cases}$$

⇓

$$E > V_2: \quad \psi_E(x) = c_1^+ \begin{cases} e^{ip_1 x/\hbar} + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{-ip_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \frac{2p_1}{p_1 + p_2} e^{ip_2 x/\hbar} & x > 0 \end{cases} \quad (*)$$

possiamo fissare la normalizzazione, scegliendo $c_1^+ = 1$

⇒ soluz. particolare a valori complessi ⇒ ψ_E^* e
 un'altre soluz. partic. indep.

$$\Rightarrow \text{soluz. gen. in } E > V_2 \text{ e}^- \\ \propto \alpha \psi_E(x) + \beta \psi_E^*(x)$$

Prendiamo soluz. particolare $\psi_E(x)$ in (*); la soluz. (stazionaria)
 dell'eq. di Sch. (dip. dal tempo) è:

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEA/\hbar} \psi_E(x) = \begin{cases} \underline{\underline{e^{i(-Et + p_1 x)/\hbar}}} + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{-i(Et + p_1 x)/\hbar} & x \in R_1 \\ \underline{\underline{\frac{2p_1}{p_1 + p_2} e^{i(-Et + p_2 x)/\hbar}}} & x \in R_2 \end{cases}$$

incid. *riflessa* *trasm.*

Densità di corrente di probabilità

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad \text{in } 3d$$

in 1d

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \psi' - \underbrace{\psi (\psi')^*}_{(\psi^* \psi)'})$$

$$\psi_E^* = \begin{cases} (c_1^+)^* e^{-i p_1 x / \hbar} + (c_1^-)^* e^{i p_1 x / \hbar} \\ (c_2^+)^* e^{-i p_2 x / \hbar} \end{cases}$$

$$\psi_E' = \begin{cases} \frac{i p_1}{\hbar} (c_1^+ e^{i p_1 x / \hbar} - c_1^- e^{-i p_1 x / \hbar}) \\ \frac{i p_2}{\hbar} c_2^+ e^{i p_2 x / \hbar} \end{cases}$$

solut. stationarie

$$J(x, x) = \begin{cases} \dots \\ |c_2^+|^2 \frac{\hbar}{2mi} \left(\frac{i p_2}{\hbar} - \left(-\frac{i p_2}{\hbar} \right) \right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{p_1}{m} |c_1^+|^2 - \frac{p_1}{m} |c_1^-|^2 & \leftarrow \begin{matrix} J_I \text{ incid.} \\ \text{rifl. } J_R \end{matrix} \\ \frac{p_2}{m} |c_2^+|^2 & \leftarrow \begin{matrix} J_T \\ \text{trasm.} \end{matrix} \end{cases} \quad x \in R_2$$

Data la corrente, possiamo definire dei coeff. di RIFL. e TRASP.

Coeff. di RIFLESSIONE: $R = \left| \frac{J_R}{J_I} \right| = \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 \quad R+T=1$

Coeff. di TRASMISSIONE: $T = \left| \frac{J_T}{J_I} \right| = \frac{p_2 |c_2^+|^2}{p_1 |c_1^+|^2} = \frac{4 p_1 p_2}{(p_1 + p_2)^2}$

Consideriamo $E = E_1$, cioè $0 < E < V_2$

In questo caso DOBBIAMO PORRE $c_2^- = 0$ in
 altre una soluzione accettabile, (cioè polinom. lin. o $\pm \infty$).

$$p_2 = i q_2 \quad q_2 \in \mathbb{R}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{i p_1 x / \hbar} + \frac{p_1 - i q_2}{p_1 + i q_2} e^{-i p_1 x / \hbar} & x \in R_1 \\ \frac{2 p_1}{p_1 + i q_2} e^{-q_2 x / \hbar} & x \in R_2 \end{cases}$$

($c_1^+ = 1$ in normalizz.)

$\leftarrow \psi_E^* \psi_E' - \psi_E \psi_E'^* = 0$

[Prendiamo ψ_E^*) è ancora solut. accettabile. Posso trovare
 una famiglia di solut. prendendo comb. lin. di ψ_E e ψ_E^* ?
 No! Perché in questo caso ψ_E e ψ_E^* sono dipendenti lin.
 $\Rightarrow (p_1 + i q_2) \psi_E - (p_1 - i q_2) \psi_E^* \Rightarrow$ quindi c'è
 un'unica solut. accettab. a meno di normalizzazione.]

$$J(x, t) = \begin{cases} \frac{p_1}{\hbar} |c_1^+|^2 - \frac{p_1}{\hbar} |c_1^-|^2 & x \in R_1 \\ 0 & x \in R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} = 1 \quad T = 0$$

Cosa succede in $E < 0$?

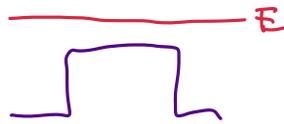
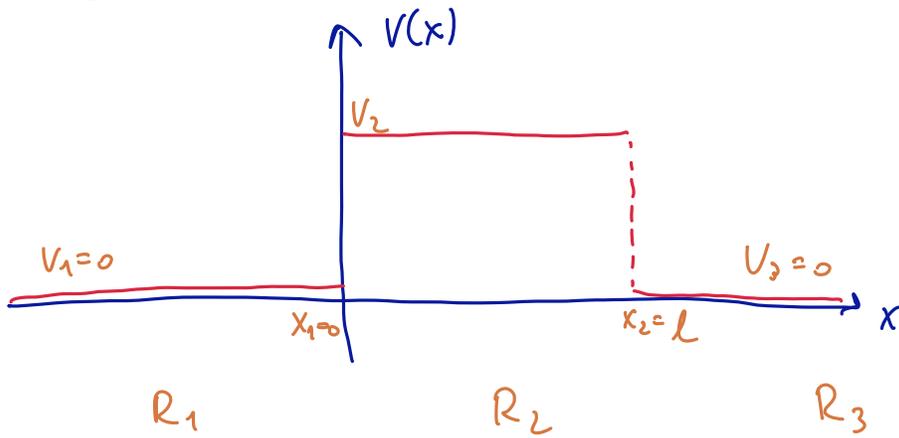
Abbiamo due condit. di accettabilità: $c_1^+ = 0$ $c_2^- = 0$ $p_1 = i q_1$ $p_2 = i q_2$

$$\psi = \begin{cases} c_1^- e^{q_1 x / \hbar} \\ c_2^+ e^{-q_2 x / \hbar} \end{cases}$$

Condit. rice: $\begin{cases} c_1^- = c_2^+ \\ q_1 c_1^- = -q_2 c_2^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^- = 0 \\ c_2^+ = 0 \end{cases}$

cioè $\psi = 0$.

BARRIERA DI POTENZIALE



Caso $E > V_2$:

- ψ_E è oscillante in tutte le regioni R_j ($j=1,2,3$)
 \Rightarrow limitate a $\pm \infty$.

- c_j^+ e c_j^- in ogni $\psi_E^{(j)}$ \Rightarrow 6 parametri

- 4 condiz. di raccordo (2 ph. di discont.)

$$p_1 = p_3 = \sqrt{2mE}$$

$$p_2 = \sqrt{2m(E - V_2)}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^+ e^{i p_1 x / \hbar} + c_1^- e^{-i p_1 x / \hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ e^{i p_2 x / \hbar} + c_2^- e^{-i p_2 x / \hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ e^{i p_3 x / \hbar} + \cancel{c_3^- e^{-i p_3 x / \hbar}} & x \in R_3 \end{cases}$$

Scegliamo soluz. particolare con $c_3^- = 0$

(\leadsto particella che arriva da sinistra)

4 condit. di raccordo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- & \psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(2)}(0) \\ p_1 (c_1^+ - c_1^-) = p_2 (c_2^+ - c_2^-) & \psi_E^{(1)'}(0) = \psi_E^{(2)'}(0) \\ c_2^+ e^{i p_2 l / \hbar} + c_2^- e^{-i p_2 l / \hbar} = c_3^+ e^{i p_1 l / \hbar} & \psi_E^{(2)}(l) = \psi_E^{(3)}(l) \\ p_2 c_2^+ e^{i p_2 l / \hbar} - p_2 c_2^- e^{-i p_2 l / \hbar} = p_1 c_3^+ e^{i p_1 l / \hbar} & \psi_E^{(2)'}(l) = \psi_E^{(3)'}(l) \end{array} \right.$$

↓
Soluz.

4 eq. in 5 parametri

$$c_2^+ = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i (p_1 - p_2) l / \hbar} \left(1 + \frac{p_1}{p_2} \right)$$

$$c_2^- = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i (p_1 + p_2) l / \hbar} \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \right)$$

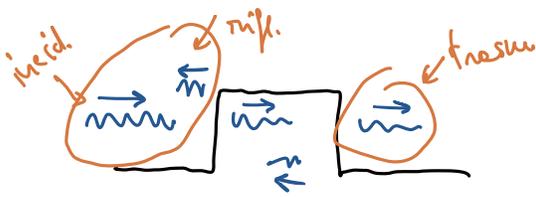
$$c_1^+ = c_3^+ e^{i p_1 l / \hbar} \left\{ \cos\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) - i \frac{p_1^2 + p_2^2}{2 p_1 p_2} \sin\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) \right\}$$

$$c_1^- = c_3^+ e^{i p_1 l / \hbar} i \frac{p_1^2 - p_2^2}{2 p_1 p_2} \sin\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right)$$

(ψ_E^* è indep. da $\psi_E \Rightarrow$ soluz. gen. è $\alpha \psi_E + \beta \psi_E^*$)

Posso fissare la normalizzazione della soluzione $\psi_E(x)$ ponendo $c_3^+ = 1$.

$$J(x, A) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi_E^* \psi_E' - \psi_E'^* \psi_E) = \begin{cases} \frac{p_1}{m} |c_1^+|^2 - \frac{p_1}{m} |c_1^-|^2 & x \in R_1 \\ \frac{p_2}{m} |c_2^+|^2 - \frac{p_2}{m} |c_2^-|^2 & x \in R_2 \\ \frac{p_1}{m} |c_3^+|^2 & x \in R_3 \end{cases}$$



$R_1 \quad R_2 \quad R_3$

$$R = \left| \frac{J_R}{J_I} \right| = \left| \frac{c_1^-}{c_1^+} \right|^2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2) \operatorname{sen}^2(p_2 l / \hbar)}{4p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2) \operatorname{sen}^2(p_2 l / \hbar)}$$

$$T = \left| \frac{J_T}{J_I} \right| = \left| \frac{c_3^+}{c_1^+} \right|^2 = \frac{4p_1^2 p_2^2}{4p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2) \operatorname{sen}^2(p_2 l / \hbar)} = \frac{4E(E - V_2)}{4E(E - V_2) + V_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{l}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_2)}\right)}$$

$$p_1 = \sqrt{2mE} \quad p_2 = \sqrt{2m(E - V_2)}$$

Fenomeno di
RISONANZA

$\leftarrow m$

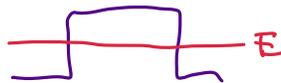
sen^2 è minimo
quando $e^- = 0$

\leftrightarrow den. min. \leftrightarrow T massimo

$$\frac{p_2 l}{\hbar} = m\pi \quad m \in \mathbb{N}^k$$

[Quando c'è risonanza, un pacchetto d'onda può rimanere in un tempo lungo in R_2 .]

Caso $0 < E < V_2$:



$$p_2 = \sqrt{2m(E - V_2)} = i \underbrace{\sqrt{2m(V_2 - E)}}_{\equiv q_2} \equiv i q_2$$

\Rightarrow la soluz. di R_2 cambia in

$$c_2^+ e^{-q_2 x / \hbar} + c_2^- e^{q_2 x / \hbar} \quad \text{per } 0 < x < l$$

- Siccome R_2 con contiene $\pm \text{Ao}$ (così è una regione limitata), allora non ho vincoli su c_2^{\pm} dovuti alla richiesta di limitatezza a $\pm \text{Ao}$.
- Ancora scegliamo di studiare la sol. particolare con $c_3^- = 0$.
- Tutti i conti sono formalmente identici al caso $E > V_2$, solo che ora $p_2 = iq_2 \in i\mathbb{R}$ ($\sin \rightarrow \sinh$
 $\cos \rightarrow \cosh$)
- In particolare possiamo vedere cosa diventa il coeff. di Trasmissione

$$T = \frac{4p_1^2 p_2^2}{4p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2) \sinh^2(p_2 \frac{l}{\hbar})} = \frac{4E(V_2 - E)}{4E(V_2 - E) + V_2^2 \sinh^2\left(\frac{l}{\hbar} \sqrt{2m(V_2 - E)}\right)}$$

$$p_2 = iq_2 = i\sqrt{2m(V_2 - E)}$$

$\neq 0$ (contrariamente all'aspettativa classica)

EFFETTO TUNNEL

- All'aumentare dell'argomento di \sinh , il denominatore cresce e T diminuisce

$$\frac{l}{\hbar} \sqrt{2m(V_2 - E)}$$

T diminuisce all'aumentare di: (e E fissa)

- l larghezza della barriera
- m massa della particella
- V_2 altezza della barriera

Al lim. in cui $\frac{q_2 l}{\hbar} \gg 1$

$$\Rightarrow \text{sinh} \left(\frac{q_2 l}{\hbar} \right) \sim \frac{1}{2} e^{q_2 l / \hbar} \gg 4E(V_2 - E)$$

$$\Rightarrow T \sim \frac{16 E (V_2 - E)}{V_2^2} e^{-2q_2 l / \hbar}$$

- [
- Electrone con $E = 1 \text{ eV}$, bariera $l = 1 \text{ \AA}$ e alt. $V_2 = 2 \text{ eV}$
 $\leadsto T = 0,78$
 - Protone in situazione analoghe
 $\leadsto T = 4 \cdot 10^{-13}$
 - oggetti macroscopici
 $\leadsto T$ probab. nullo

]