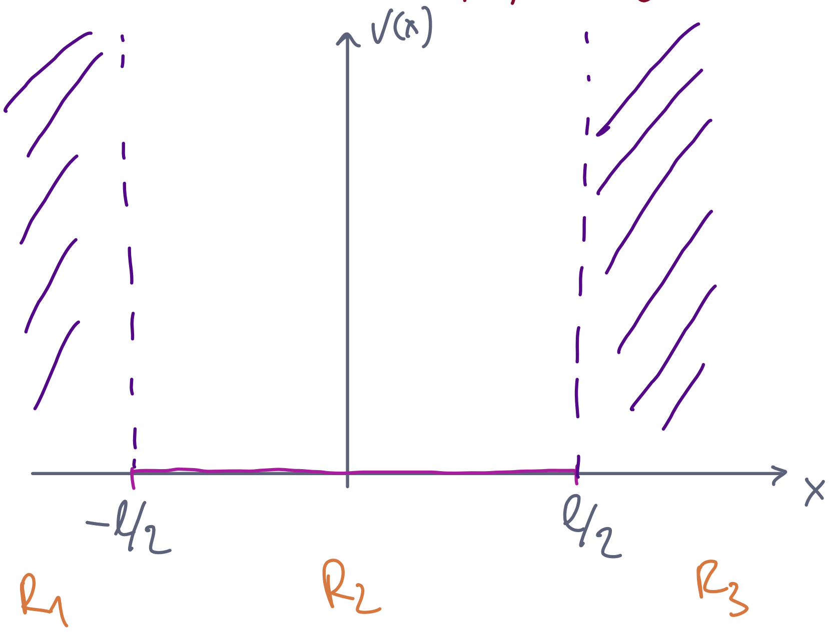
BUCA RETTANGOLARE INFINITA



$V_1, V_3 \to \infty$
$V_2 = 0$

il potenziale ha una DISCONTINUITÀ INFINITA in $x_1 = -\ell/2$, $x_2 = \ell/2$

ψ_E sarà continua in x_1 e x_2, ma non necessariamente derivabile

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E$$

R_1, R_3) ψ_E limitata all'infinito e di conseg. ψ_E''

$$\Rightarrow \quad \psi_E^{(1,3)}(x) = 0 \qquad \forall x \in R_1, R_3$$

R_2) $$\psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E \qquad p_2 = \sqrt{2mE}$$

$$\psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar}$$

CONDIZIONI DI RACCORDO (ψ_E continua in $x = \pm \ell/2$):

$$\psi_E^{(2)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(1)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) \qquad \psi_E^{(2)}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(3)}\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

$$\begin{cases} c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar} = 0 \\ c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = 0 \end{cases}$$

2 eq. (lineari omogenee) in 2 incognite c_2^+, c_2^-.

Il sistema omogeneo

$$M\begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ip_2\ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar} \\ e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

ha soluz. $(c_2^+, c_2^-) \neq (0,0)$ solo se la matrice M ha rango minore di 2 (cioè se $\det M = 0$)

$$\det M = e^{-ip_2 \ell/\hbar} - e^{ip_2\ell/\hbar} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2ip_2\ell/\hbar} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2ip_2\ell}{\hbar} = 2in\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$(p_2^2 = 2mE)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p_2 \ell}{\hbar} = n\pi} \rightsquigarrow \text{Condizione sull'energia}$$

$$\rightarrow \frac{2mE\ell^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2} \qquad \cancel{n \in \mathbb{Z}^*} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

possibili valori dell'en.

con $\underline{n \neq 0}$ (altrimenti $p_2 = 0$ e $\psi_E^{(2)}(x) = 0 \quad \forall x \in R_2$)

$$\frac{p_2\ell}{\hbar} = n\pi \Rightarrow e^{ip_2\ell/\hbar} = e^{i\pi n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2\ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar} \\ e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

$$\Big| \quad e^{ip_2\ell/\hbar} = e^{i\pi n}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi n/2} & e^{i\pi n/2} \\ e^{i\pi n/2} & e^{-i\pi n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi n} \\ \cancel{e^{i\pi n}} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} \to c_2^+ + e^{i\pi n} c_2^- = 0$$

è dip. lin. della prima

$$\downarrow$$

$$c_2^+ + (-1)^n c_2^- = 0$$

$$\frac{p_2 \ell}{\hbar} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{\hbar} = \frac{n\pi}{\ell}$$

n pari : $c_2^- = -c_2^+$ $\quad \underline{n = 2m}$

$$\psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ \left(e^{ip_2 x/\hbar} - e^{-ip_2 x/\hbar} \right) =$$

$$= 2ic_2^+ \sin\left(\frac{p_2 x}{\hbar}\right) = 2ic_2^+ \sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \qquad m \neq 0$$

DISPARI (in $x \to -x$)

n dispari : $c_2^- = c_2^+$ $\quad \underline{n = 2m+1}$

$$\psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ \left(e^{ip_2 x/\hbar} + e^{-ip_2 x/\hbar} \right)$$

$$= 2c_2^+ \cos\left(\frac{p_2 x}{\hbar}\right) = 2c_2^+ \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right)$$

PARI (in $x \to -x$)

Spettro dell'en. è DISCRETO :

- Per ogni valore E_n dell'energia trovo una sola autofunz. (autostato) (LIVELLO ENERGETICO è NON-DEGENERE)
- Le autofunzioni $\in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possono rappresentare stati del sistema.
- Le autofunzioni sono REALI (a meno di un fattore complesso cost.)
- Le autofunzioni hanno PARITÀ DEFINITA $\quad (V(-x) = V(x))$

↳ Queste sono proprietà generiche per problemi UNIDIMENSIONALI con spettro discreto.

- Lo spettro è limitato inferiormente ($V(x) \geq 0 \Rightarrow E > 0$) il livello energetico di minima energia (FONDAMENTALE) è

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$$

⇝ in particolare la particella non può avere en. nulla ; questo lo si può ricavare dal principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

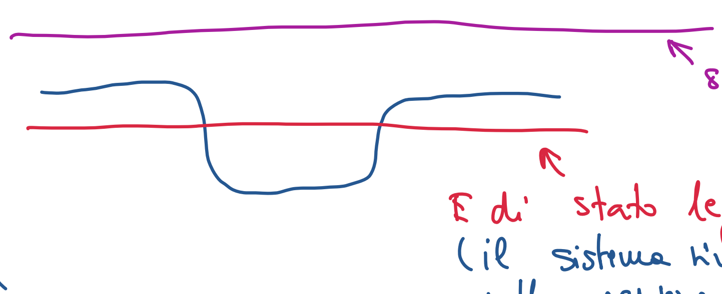
In questo problema $\Delta x_{max} = l$

$$\Downarrow$$

$$\Delta p_{min} = \frac{\hbar}{2l} \rightsquigarrow E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{4ml^2}$$

Stati legati e stati "scattering"

classicamente



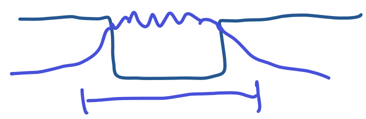
stato scattering (il corpo arriva dall'infinito, interagisce col potenziale, e torna all'infinito)

E di stato legato (il sistema rimane nella regione)

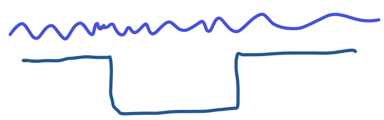
Quantisticam., qualitativam. è molto simile

$E < V(-\infty)$ e $E < V(+\infty)$ → stati legati

(le funzioni d'onda sono localizzate nella regione "permessa")



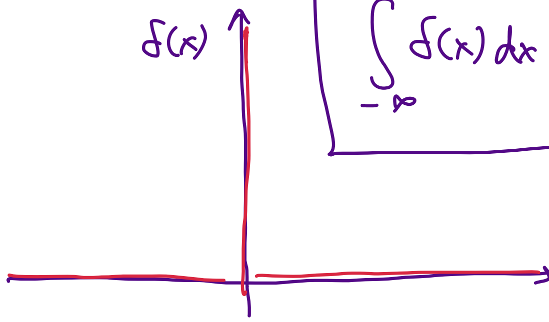
$E > V(-\infty)$ o $E > V(+\infty)$ → scattering

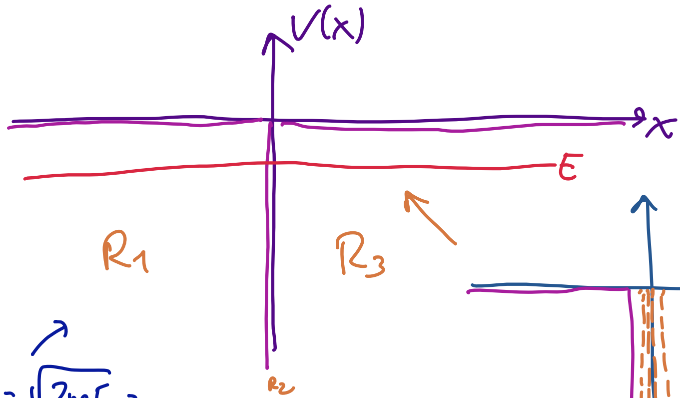


POTENZIALE A DELTA DI DIRAC

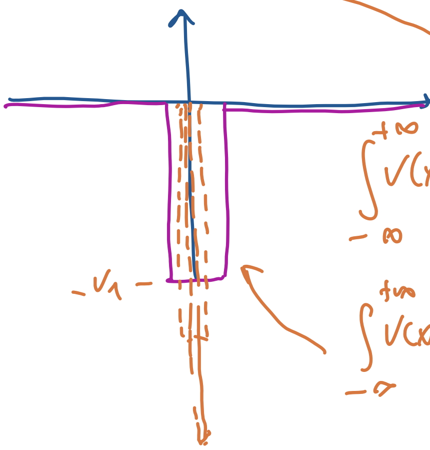
$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \qquad \alpha > 0$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1}$$





$$\vec{p}_1 = \sqrt{2mE} = i\sqrt{2m|E|} = i q_1 = p_3$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = -\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) = -\ell V_1$$

$E < 0$

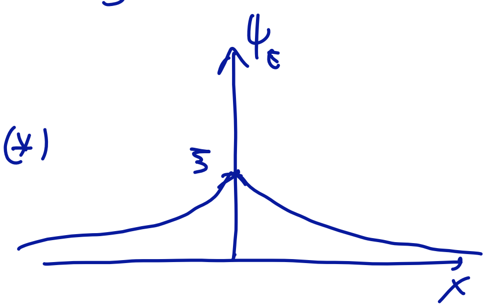
$$\psi_E^{(1)} = \cancel{c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar}} + c_1^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x < 0$$

$$\psi_E^{(3)} = c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} + \cancel{c_3^- e^{q_1 x/\hbar}} \qquad x > 0$$

CONDIZ. DI RACCORDO: continuità di ψ_E

$$\psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(3)}(0) \rightarrow c_1^- = c_3^+ \overset{def.}{\equiv} \xi$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi'' + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi = E\underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi}_{\downarrow\, 0} \qquad \epsilon \to 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] = -\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi = \alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\psi(x)\,dx = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\psi(x)\,dx$$

$$= \alpha\,\psi(0)$$

$$\Rightarrow \delta\psi'\big|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

Imponiamo queste condiz. alla soluzione trovata (*) .

$$\psi'_E = \begin{cases} \frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ -\frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta \psi'_E\big|_{x=0} = \frac{2 q_1 \xi}{\hbar} \leftarrow \text{dev'essere} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot \overset{\psi(0)}{\overset{\parallel}{\xi}}$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{m\alpha}{\hbar} \quad \xrightarrow[q_1 = \sqrt{2m|E|}]{} \quad \boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$$

$\Longrightarrow$ c'è un solo autovalore dell'energia che risolve l'eq. di Sch. (per $E<0$)

Normalizziamo la funzione d'onda (autostato ψ_E relativo a $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$)

$$\psi_E = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$

(autofunzione PARI e REALE)

Cerchiamo ξ t.c. $\|\psi_E\|^2 = 1$

$$\|\psi_E\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2|\xi|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2q_1 x/\hbar} dx =$$

$$= 2|\xi|^2 \left[-\frac{\hbar}{2q_1} e^{-2q_1 x/\hbar} \right]_0^{+\infty} = \frac{\hbar}{q_1}|\xi|^2 = \frac{\hbar^2}{m\alpha}|\xi|^2$$

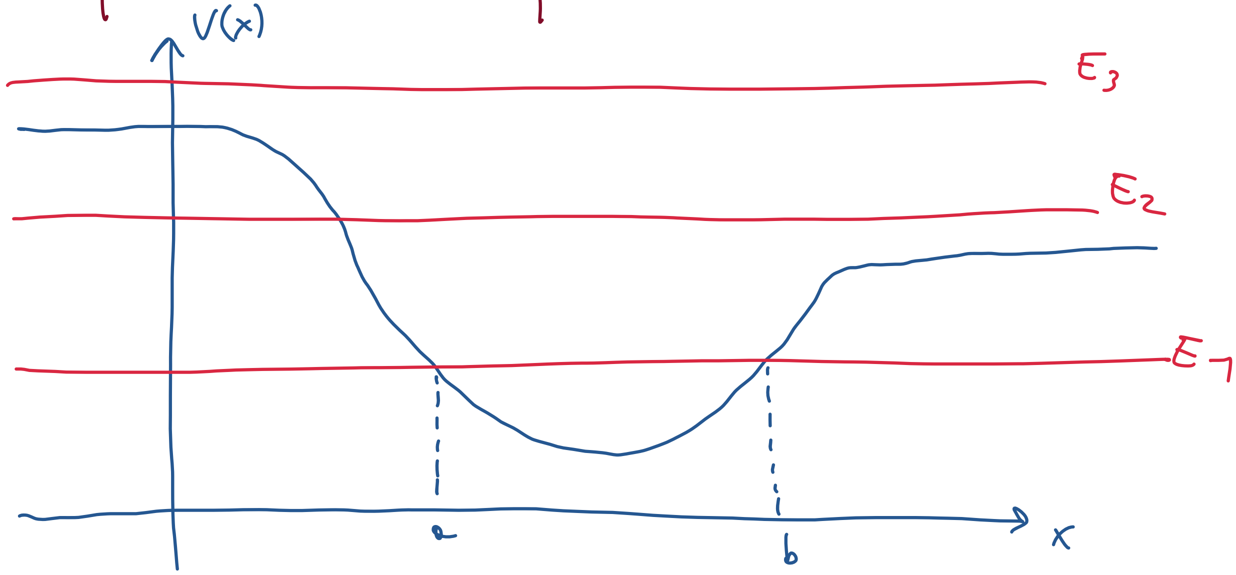
$$q_1 = \sqrt{2mE} = \frac{m\alpha}{\hbar}$$

$= 1$ se

$$|\xi|^2 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

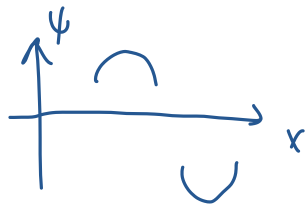
cioè $\xi = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$ (a meno di una fase)

Studio qualitativo dell'eq. di Sch. 1 dim.

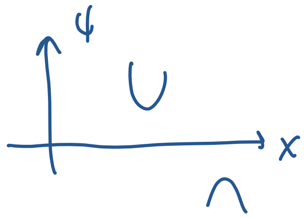


$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi$$

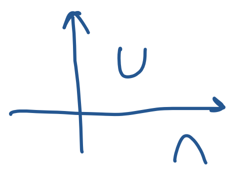
- $E > V$



- $E < V$



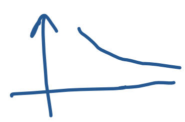
Caso E_1) $x < a$ $x > b$



, cioè

$\psi(x)$ o si allontana ~~indefinitam.~~ dall'asse x

o vi tende asintoticam. a zero



(perché $\psi'' \to 0$)

$\Rightarrow$ due condiz. di accettab. su solut. di eq. diff. del 2° ord. $\Rightarrow$ CONDIZIONE SULL'ENERGIA

$\rightsquigarrow$ spettro discreto e stati legati

Caso E_2) condiz. di limitatezza a sinistra

→ SPETTRO CONTINUO ma NON-DEG.

Caso E_3) SPETTRO CONTINUO DEGENERE (per ogni valore di E ci sono due soluz. indip. dell'eq. di Sch.).