Al lim. in cui $\frac{q_2 \ell}{\hbar} \gg 1$

$$\Rightarrow \quad \sinh\left(\frac{q_2 \ell}{\hbar}\right) \sim \frac{1}{2} e^{q_2 \ell/\hbar} \gg 4E(V_2 - E)$$

$$\Rightarrow \quad T \sim 16 \, \frac{E(V_2-E)}{V_2^2} \, e^{-2 q_2 \ell/\hbar}$$

- Elettrone con $E = 1 eV$, barriera $\ell = 1 Å$ e alt. $V_2 = 2eV$

  $\rightsquigarrow \quad T = 0{,}78$

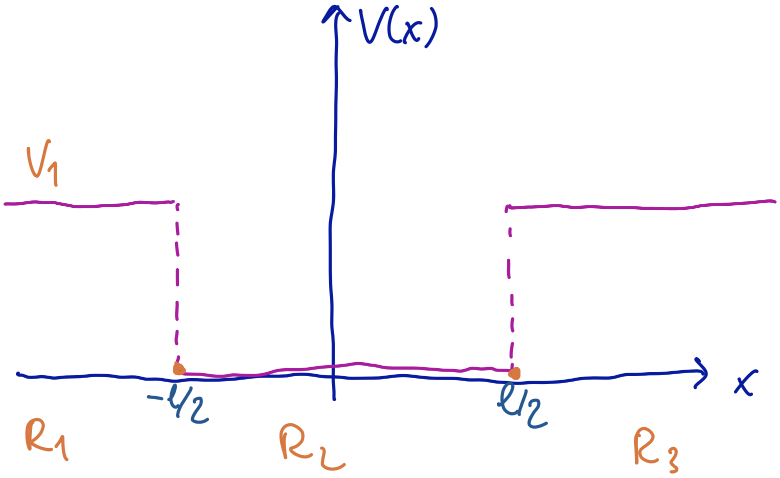
- Protone in situazioni analoghe

  $\rightsquigarrow \quad T = 4 \cdot 10^{-19}$

- oggetti macroscopici

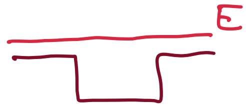
  $\rightsquigarrow$ T praticam. nullo

BUCA RETTANGOLARE



$V_2 = 0$
$V_3 = V_1$
$x_1 = -\ell/2$
$x_2 = \ell/2$

Caso $E > V_1$



- Soluz. oscillanti in tutte le regioni R_j $(j = 1,2,3)$

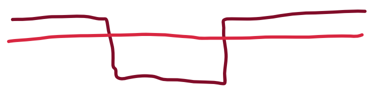
$$P_1 = \sqrt{2m(E - V_1)} \qquad P_2 = \sqrt{2mE} \qquad (*)$$

- le soluzioni $\psi_E(x)$ sono formalmente le stesse del caso della barriera, ma con diversi valori di P_1 e P_2.

Per esempio

$$T = \frac{4P_1^2P_2^2}{4P_1^2P_2^2 + (P_1^2 - P_2^2)\sin^2(P_2\ell/\hbar)} \overset{(*)}{=} \frac{4(E - V_1)E}{4(E - V_1)E + V_1^2\sin^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2mE}\right)}$$

Caso $0 < E < V_1$



- Andamento oscillante in R_2 $(E > V_2 = 0)$ ed andam. ESPONENZIALE nelle regioni (illimitate) R_1 e R_3.

$$\underset{x \to -\infty}{} c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar} + c_1^- e^{+q_1 x/\hbar} \qquad x \in R_1 \qquad P_1 = iq_1$$

$$c_3^+ e^{-q_1} + c_3^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x \in R_2 \qquad P_3 = iq_3$$

$x \to +\infty$ $\qquad q_1 = q_3 = \sqrt{2m(V_1 - E)}$

↳ Condiz. di accettab. (limitatezza a $\pm\infty$):

$$\underline{c_1^+ = 0} \quad \text{e} \quad \underline{c_3^- = 0}$$

Soluzione sono:

$q_1 = \sqrt{2m(V_1-E)}$

$p_2 = \sqrt{2mE}$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^- e^{q_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} & x \in R_3 \end{cases}$$

FUNZIONE $\in L^2(\mathbb{R})$ (può rappresentare uno stato)

Ora imponiamo le condizioni di RACCORDO:

In $x_1 = -\ell/2$:

$\psi_E^{(1)}(-\frac{\ell}{2}) = \psi_E^{(2)}(-\frac{\ell}{2})$ $\qquad c_1^- e^{-q_1\ell/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}$

$\psi_E^{(1)\prime}(-\frac{\ell}{2}) = \psi_E^{(2)\prime}(-\frac{\ell}{2})$ $\qquad q_1 c_1^- e^{-q_1\ell/2\hbar} = ip_2(c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar})$

In $x_2 = \ell/2$:

$\psi_E^{(2)}(\frac{\ell}{2}) = \psi_E^{(3)}(\frac{\ell}{2})$ $\qquad c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$

$\psi_E^{(2)\prime}(\frac{\ell}{2}) = \psi_E^{(3)\prime}(\frac{\ell}{2})$ $\qquad ip_2(c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar}) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$

$\to$ Sistema lineare omogeneo di 4 eq. in 4 incognite

Generalmente ha come unica soluzione $c_1^- = c_2^+ = c_2^- = c_3^+ = 0$ cioè $\psi_E \equiv 0$ che non è accettabile

$\Downarrow$

Avrò soluzioni solo per determinati valori dei coefficienti delle equazioni lineari, cioè per determinati valori dell'energia E.

- Prime due eq. dicono che $c_1^- \neq 0$, altrimenti $c_2^+ = 0 = c_2^-$ e allora anche $c_3^+ = 0$ per le ultime due eq.

$\Rightarrow$ possiamo fissare la normalizzazione scegliendo $c_1^- = 1$

- Dalle prime due equazioni:

$$ip_2 \left[\cancel{A_1}\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = C_2^+ \cancel{e^{-ip_2\ell/2\hbar}} + C_2^- \cancel{e^{ip_2\ell/2\hbar}} \right] \cdot (-ip_2)$$

$$+ \quad q_1 \cancel{A_1}\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = ip_2 \left(C_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} - C_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar} \right) \qquad +$$

$$(q_1+ip_2)\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = 2ip_2\, C_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar}$$

$$(q_1-ip_2)\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = -2ip_2\, C_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}$$

$$C_2^+ = \frac{q_1+ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1\ell/2\hbar}\, e^{ip_2\ell/2\hbar}$$

$$C_2^- = -\frac{q_1-ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1\ell/2\hbar}\, e^{-ip_2\ell/2\hbar}$$

- Andiamo a sostituire nelle ultime due eq.

$$C_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + C_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = C_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$$

$$ip_2\left(C_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} - C_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} \right) = -q_1\, C_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$$

$$C_3^+ = \frac{q_1+ip_2}{2ip_2}\, e^{ip_2\ell/\hbar} - \frac{q_1-ip_2}{2ip_2}\, e^{-ip_2\ell/\hbar}$$

$$\boxed{(q_1+ip_2)^2 e^{ip_2\ell/\hbar} = (q_1-ip_2)^2 e^{-ip_2\ell/\hbar}}$$

vincolo sui coeff. delle eq. lineari del sistema

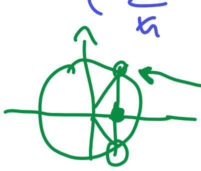
$$\left(\frac{q_1-ip_2}{q_1+ip_2}\right)^2 = e^{2ip_2\ell/\hbar}$$

$$\frac{q_1-ip_2}{q_1+ip_2} = \pm e^{ip_2\ell/\hbar} = \pm\left(\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) \right)$$

$$= \frac{(q_1-ip_2)(q_1-ip_2)}{(q_1+ip_2)(q_1-ip_2)} = \frac{q_1^2-p_2^2-2iq_1p_2}{q_1^2+p_2^2}$$

1) Segno negativo:

$$-\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) = \frac{q_1^2-p_2^2}{q_1^2+q_2^2} \qquad \mathrm{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) = \frac{2q_1p_2}{q_1^2+p_2^2} > 0$$



$p_2 = \sqrt{2mE}$
$q_1 = \sqrt{2m(V_1-E)}$

La prima equazione può essere riscritta usando le formule di bisezione $\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}\right)$:

$$\left|\cos\left(\frac{p_2 \ell}{2\hbar}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(p_2\ell/\hbar)}{2}} \overset{\downarrow}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\frac{q_1^2-p_2^2}{q_1^2+p_2^2}\right]} = \frac{p_2}{\sqrt{q_1^2+p_2^2}} =$$

$$= \frac{p_2}{\sqrt{2mV_1}}$$

Definisco $\quad x \equiv \frac{p_2\ell}{2\hbar} = \frac{\ell}{2\hbar}\sqrt{2mE} \qquad \xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1\ell^2}}$

$$|\cos x| = \xi x$$

x dip. dall'en. E

ξ non dip. da E

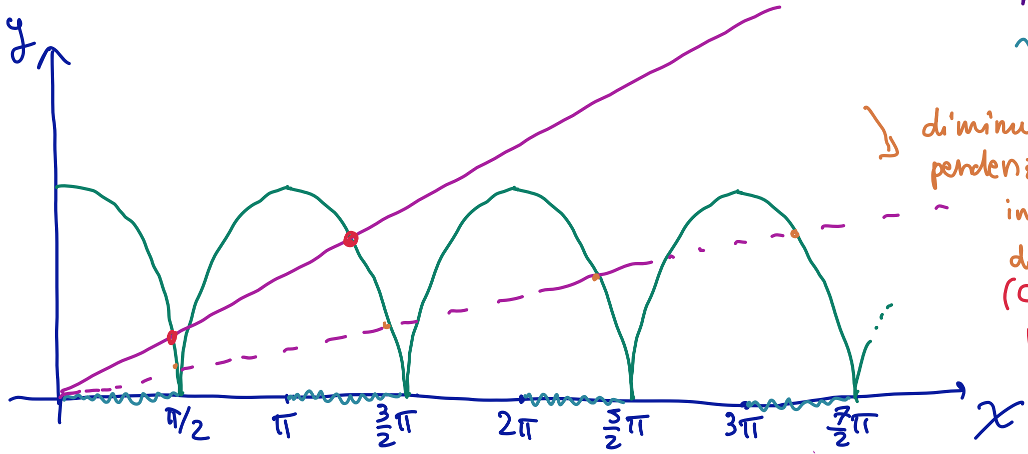
Voglio sapere se ci sono valori di E che risolvono l'equazione $|\cos x| = \xi x$ (è una delle eq. del probl. agli autovalori di $\hat{H}$)

risolviamola graficam.

con $\operatorname{sen} 2x > 0 \quad 0 < 2x < \pi \mod 2\pi$

$\downarrow$

$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



diminuendo ξ, cala la pendenza della retta, che intercetta un NUMERO CRESCENTE di intersezioni con $y=|\cos x|$

(Cioè, diminuendo ξ aumenta il numero di autovalori E di $\hat{H}$)

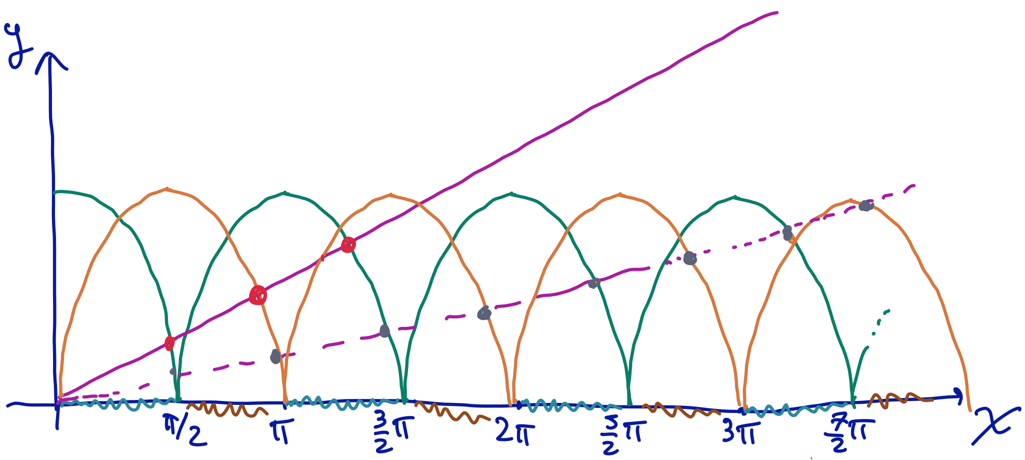
Rappresentiamo le funz. $y = |\cos x|$ e $y = \xi x$

- numero finito di valori possibili per E.
- esiste sempre almeno una soluzione, anche se $\xi \gg 1$

2) Segno positivo :

$$\cos^2 \underbrace{\frac{p_2 \ell}{2\hbar}}_{= x} = \frac{q_1^2}{2mV_1} \qquad \sin \frac{p_2 \ell}{\hbar} = - \frac{2 q_1 p_2}{q_1^2 + p_2^2} < 0$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{2mV_1}} = \sqrt{1 - 1 + (\xi x)^2} = \xi x$$



$\sin 2x < 0$

→ Il numero di soluzioni è $\underline{\geq 1}$, è finito

e aumenta al decrescere di $\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1 \ell^2}}$, cioè

all'aumentare della larghezza della buca (ℓ)

e dell'altezza della buca (V_1).

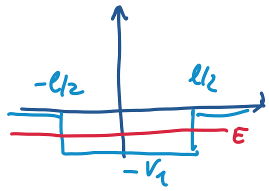
Appendice: facciamo limite $V_1 \to \infty$ (buca infinita)

$V_1 \to \infty \Rightarrow \xi \to 0 \Rightarrow$ soluzioni per $\chi = n\frac{\pi}{2}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

cioè, preso $\chi = \frac{p_2 \ell}{2\hbar} = \sqrt{\frac{m\ell^2 E}{2\hbar^2}}$, ho $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}$ (vedi buca infinita)

Appendice: facciamo limite $V_1 \to \infty$, $\ell \to 0$, ma $V_1 \cdot \ell = \alpha$ cost.

Prendiamo situazione



$\Rightarrow p_2 = \sqrt{2m(E-V_1)}$

$\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1\ell^2}} \to \infty \Rightarrow$ una sola soluzione per $\chi \to 0$

Studiamo bene questo limite ripartendo dall'eq. originaria attorno a $\chi \to 0$:

$q_1 = \sqrt{-2mE} \qquad p_2 = \sqrt{2m(E+V_1)}$

$$\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) = -\frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + p_2^2} \overset{(*)}{=} \frac{V_1 + 2E}{V_1}$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_1)}\,\ell}{\hbar}\right)$$

$(E+V_1)^{1/2}\ell \to 0 \Rightarrow$ posso espandere coseno per piccolo angolo:

$$1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2m(E+V_1)\ell^2}{\hbar^2}\right] \overset{(*)}{=} 1 + \frac{2E}{V_1} \qquad V_1 = \frac{\alpha}{\ell}$$

$$\to -\frac{m(E+V_1)\ell^2}{\hbar^2} = \frac{2E}{V_1} \to \left(\cancelto{0}{\frac{m\ell^2}{\hbar^2}} + \frac{2}{V_1}\right)E = -\frac{m\ell^2 V_1}{\hbar^2} = E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

(vedi potenziali a δ di Dirac)

Appendice: condizione sull'energia del determinante della matrice associata al sist. omogeneo

$$\begin{cases} c_1^- e^{-q_1 l/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar} \\ q_1 c_1^- e^{-q_1 l/2\hbar} = ip_2 \left(c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar} \right) \\ \\ c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar} \\ ip_2 \left(c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar} \right) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar} \end{cases}$$

Sist. omogeneo in 4 eq. Posso risolverlo

$$\begin{pmatrix} e^{-q_1 l/2\hbar} & -e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ip_2 l/2\hbar} & e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{-q_1 l/2\hbar} \\ 0 & ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = 0$$

Ha soluzioni diverse da $(0,0,0,0)$ solo se $\det = 0$

$$\det = e^{-q_1 l/\hbar} \left[\underline{-iq_1 p_2 e^{-ip_2 l/\hbar}} + p_2^2 e^{ip_2 l/\hbar} \underline{- p_2^2 e^{-ip_2 l/\hbar}} - iq_1 p_2 e^{ip_2 l/\hbar} \right]$$
$$+ e^{-q_1 l/\hbar} \left[\underline{+q_1^2 e^{-ip_2 l/\hbar}} - iq_1 p_2 e^{ip_2 l/\hbar} \underline{- iq_1 p_2 e^{-ip_2 l/\hbar}} - q_1^2 e^{ip_2 l/\hbar} \right]$$
$$= e^{-q_1 l/\hbar} \left[e^{-ip_2 l/\hbar} (q_1 - ip_2)^2 - e^{ip_2 l/\hbar} (q_1 + ip_2)^2 \right]$$

$$= 0 \longleftrightarrow \boxed{\left(\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2} \right)^2 = e^{2ip_2 l/\hbar}}$$

Quando questa relaz. è soddisfatta, le linee della matrice sono dip. e ce ne sono solo 3 indip. Prendiamo le prime tre.

$$\begin{pmatrix} e^{-q_1 l/2\hbar} & -e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ip_2 l/2\hbar} & e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{-q_1 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = 0$$

Possiamo fissare $c_1^- = 1$, perché se fosse $= 0$, allora le prime due righe (indip.!) implicherebbero c_2^+ e $c_2^- = 0$ e la terza allora $c_3^+ = 0$.

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} & e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ e^{ip_2 l/2\hbar} & e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{-q_1 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-q_1 l/2\hbar} \\ q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} & e^{ip_2 l/2\hbar} \\ ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

$$c_3^+ = e^{q_1 l/2\hbar} \left(e^{ip_2 l/2\hbar} c_2^+ + e^{-ip_2 l/2\hbar} c_2^- \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ip_2 & -ip_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} c_2^+ \\ e^{ip_2 l/2\hbar} c_2^- \end{pmatrix} = e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

inversa

$$\det = -2ip_2$$

$$\frac{1}{2ip_2} \begin{pmatrix} ip_2 & 1 \\ ip_2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} \\ c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar} \end{pmatrix} = \frac{1}{2ip_2} e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} q_1 + ip_2 \\ -q_1 + ip_2 \end{pmatrix}$$

$$c_3^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2} e^{ip_2 l/\hbar} - \frac{q_1 - ip_2}{2ip_2} e^{-ip_2 l/\hbar}$$