Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Biologiche
Corso di Fisica AA 2021/2022

Esercitazione 12

TERMODINAMICA – PARTE II

Stefania Baronio

stefania.baronio@phd.units.it

#1 Pistone e molla

Un recipiente cilindrico chiuso con asse orizzontale di sezione S=50 cm^2 e di lunghezza L=1.0 m, è diviso in due sezioni da un pistone P che scorre nel cilindro a tenuta e senza attrito. Siano A e B le basi del cilindro. Tra la base A e il pistone P è contenuto un gas perfetto biatomico. Tra la base B e il pistone è interposta una molla di lunghezza a riposo l_0=40 cm e di costante elastica K=500 N/m. Tra la base B e il pistone è stato fatto il vuoto. Inizialmente la temperatura del sistema è T_i=27°C e la lunghezza della molla è pari a l_i=20 cm. In questa configurazione iniziale si calcolino:

a) La pressione iniziale P_i;

$C_v = \frac{5}{2}R$

b) Il numero di moli n del gas.

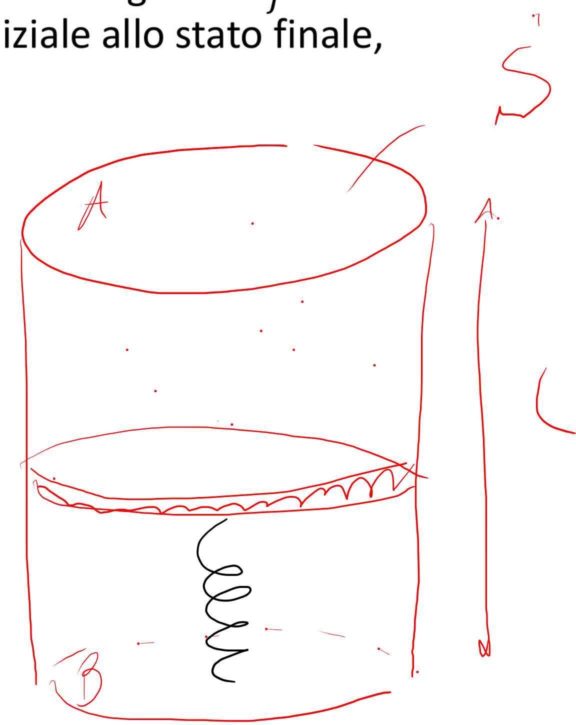
Successivamente la temperatura del gas viene fatta diminuire fino a quando la molla raggiunge la lunghezza l_f=30 cm. Con riferimento a questo stato finale, ed alla trasformazione termodinamica dallo stato iniziale allo stato finale, si calcolino:

c) La temperatura finale T_f;

d) La variazione dell'energia interna del gas;

e) Il lavoro L fatto sul gas (o dal gas, specificare);

f) Il calore Q ceduto (o assorbito, specificare) dal gas.



$T_i = 27\,^{\circ}C = 300\,K$

$l_0 = 40\,cm$

$l_i = 20\,cm$

$L = 1\,m$

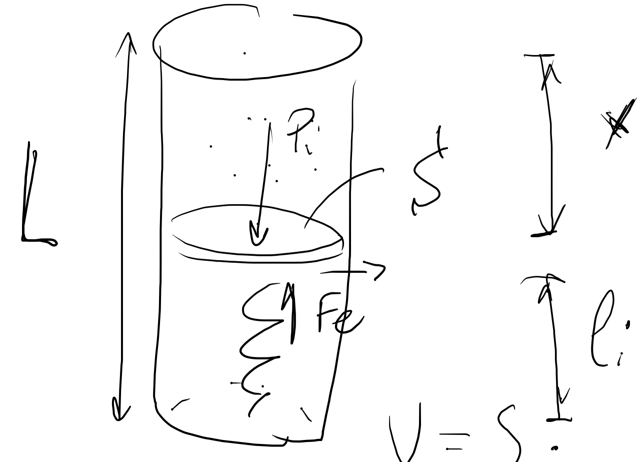
$S = 50\,cm^2$

$k = 500\,N/m$

a) $P_i = ?$

$$P_e = \frac{|\vec{F_e}|}{S} = \frac{K \cdot \Delta l}{S} = P_i$$

$$P_i = \frac{K \cdot \Delta l}{S} = \frac{500\,\frac{N}{\cancel{m}} \cdot 0.2\,\cancel{m}}{50 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 2 \cdot 10^4\,Pa$$



$V = S \cdot$

$\Delta l = 20\,cm$

b) $n = ?$

$PV = nRT$, $x = 0.8\,m$

$$n = \frac{P_i \cdot V_i}{R\,T_i} = \frac{P_i \cdot (S \cdot x)}{R \cdot T_i} = 0.032\,mol$$

K !

$$= \frac{2 \cdot 10^4\,Pa \cdot 0.8\,m \cdot 50 \cdot 10^{-4}\,m^2}{8.314\,J/mol \cdot \cancel{K} \cdot 300\,\cancel{K}}$$

c) $T_f = ?$

$l_f = 30\ cm$

$PV = nRT$

$\Delta l_f = |l_f - l_0| = 0.1\,m = \frac{\Delta l_i}{2}$

$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = 131\,K = -142\,°C$

-273

• $P_f = \frac{K \cdot \Delta l_f}{S} = \left(\frac{K \Delta l_i}{S}\right)\frac{1}{2} = \frac{P_i}{2}$

• $V_f = S \cdot (\underbrace{L - l_f}_{x_f = 0.7\,m})$

$\Rightarrow P_f = 10^4\,Pa$

d) $\Delta E_{int} = ?$

$\Delta E_{int} = n \cdot C_v \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2}R \cdot \Delta T \simeq -112\,J$

e) $\mathcal{L} = -\cancel{P}\Delta V \longrightarrow \mathcal{L} = -\int_i^f p\,dV$, $\mathcal{L}_{el} = -\Delta U_{el} = -\frac{1}{2}K\left(\Delta l_f^2 - \Delta l_i^2\right)$

LAVORO SUL SISTEMA

$= -\frac{1}{2} \cdot 500\,\frac{N}{m}\left(0.1^2 - 0.2^2\right) m^2 = 7.5\,J$

1) $Q = ?$

$$\Delta E_{int} = L + Q$$

$$Q = \Delta E_{int} - L = -112\,J - 7.5\,J = -119.5\,J$$ CEDUTO !

#2 I due percorsi

Una mole di gas monoatomico perfetto subisce una trasformazione termodinamica, passando dallo stato iniziale A allo stato finale B. Nello stato A si ha T_0=300 K e $V_0= 10^3\ cm^2$, mentre nello stato B si ha T_1=350 K e $V_1= 10^3\ cm^2$.
Nell'ipotesi in cui tutte le trasformazioni siano quasi-statiche e reversibili, con riferimento alla figura:

a) Calcolare il calore Q_1 assorbito dal gas nel compiere la trasformazione da A a B lungo il percorso 1 (isocora + isoterma);

b) Calcolare il calore Q_2 assorbito dal gas nel compiere la trasformazione da A a B lungo il percorso 2 (isoterma + isocora);

c) Calcolare infine il rapporto $\Delta S_1/\Delta S_2$ tra le variazioni di entropia relative alla trasformazione lungo il percorso 1 e lungo il percorso 2.

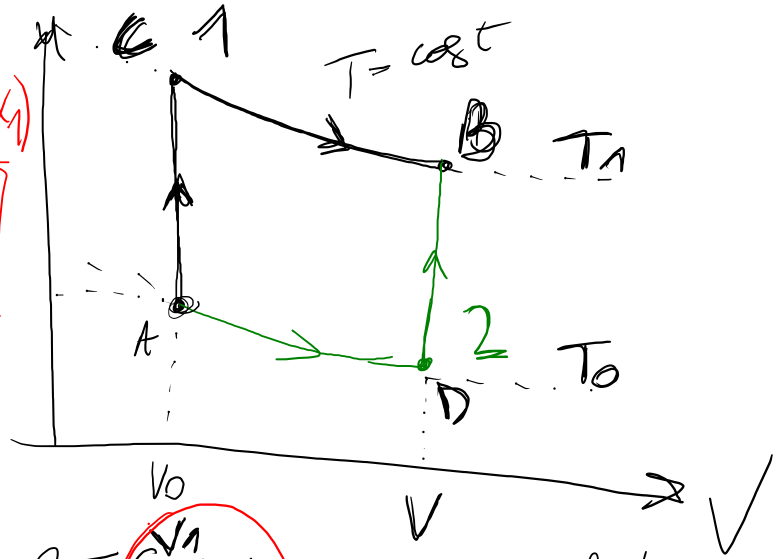
a) $Q_1 = ?$

$\Delta E_{int} = L + Q$

AC $\rightarrow L = 0$

CB $\rightarrow \Delta E_{int} = 0$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = \ln(x_2) - \ln(x_1) = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$



$= n c_V \Delta T$

$Q_1 = Q_{AC} + Q_{CB} = \Delta E_{int\,AC} + (-L_{CB})$

cost.

$L_{CB} = -\int_i^f p\,dV \xrightarrow{p=\frac{nRT}{V}} = -\int_i^f \frac{nRT_1}{V}\,dV = -nRT_1\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V} = -RnT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$

$$Q_1 = nC_V \Delta T - \left(-nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)\right), \quad \Delta T = T - T_0 = 50\ K$$

$$= \left[\frac{3}{2}\Delta T + T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)\right] R n$$

$$= \left[\frac{3}{2} \cdot 50\cancel{K} + 350\ K \cdot \ln 5\right] \cdot 1\cancel{mol} \cdot 8.31 \frac{J}{\cancel{mol}\ \cancel{K}} \simeq 5304\ J$$

b)

$$L_{AD} = -nRT_0 \ln\left(V_1/V_0\right) = -Q_{AD} \qquad T_0 < T$$

$$Q_{DB} = nC_V \Delta T = Q_{AC}$$

$$Q_2 = Q_{AD} + Q_{DB} = nR\left[T_0 \ln 5 + \frac{3}{2}\Delta T\right] = 8.31\left[300 \ln 5 + \frac{3}{2} \cdot 50\right] J$$

$$= 4636\ J$$

c) $\Delta S_1 / \Delta S_2 = ?$ $\Rightarrow$ DEVE ESSERE 1!!

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ}{T}$$

① $\Delta S_1 = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$

ISOCORA

$$\Delta S_{AC} = m c_v \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = m c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$dQ = dE_{int} = m c_v \, dT$$

ISOTERMA

$$\Delta S_{CB} = mR \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = mR \ln(V_1/V_0)$$

$$\frac{dQ}{T} = -\frac{dL}{T} = \frac{p\,dV}{T} = \frac{mR\cancel{T}\,dV}{V\cancel{T}}$$

② $\Delta S_2 = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$

$$\Delta S_{AD} = mR \ln(V_1/V_0)$$

$$\Delta S_{DB} = m c_v \ln(T_1/T_0)$$

$$\Delta S_1 = m c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + mR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

$$\Delta S_2 = mR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + m c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$\Rightarrow$ SONO UGUALI: $\Delta S_1 / \Delta S_2 = 1$

#3 La macchina termica

Una macchina termica lavora tra due serbatoi alle temperature T_F=350K e T_C=600 K, assorbendo dal serbatoio caldo 1.00 KJ e fornendo 250 J di lavoro.

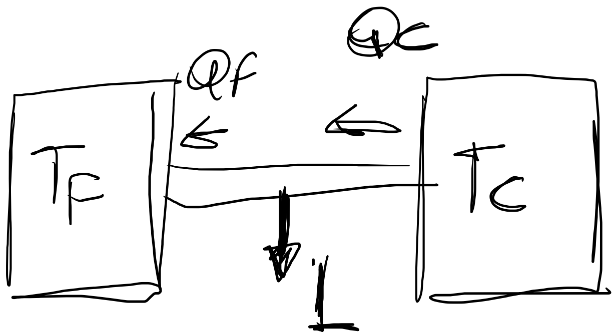
a) Calcolare la variazione di entropia dell'Universo ΔS_U per un ciclo della macchina termica;

b) Calcolare il lavoro svolto da una macchina termica che segue un ciclo di Carnot tra le temperature T_F e T_C; Q_C

c) Dimostrare che la differenza tra il lavoro trovato al punto (b) e quello della macchina termica iniziale è pari a $T_F \Delta S_U$.

$|Q_C| = 1\,KJ$ $\quad L = |Q_C| - |Q_F|$

$L = 250\,J$



a) $|Q_F| = |Q_C| - L = (10^3 - 250)\,J = 750\,J$

$\Delta S_C = \dfrac{-|Q_C|}{T_C}$, $\Delta S_F = +\dfrac{|Q_F|}{T_F}$

$\Delta S = \int \dfrac{dQ}{T} = \dfrac{Q}{T}$

T costanti

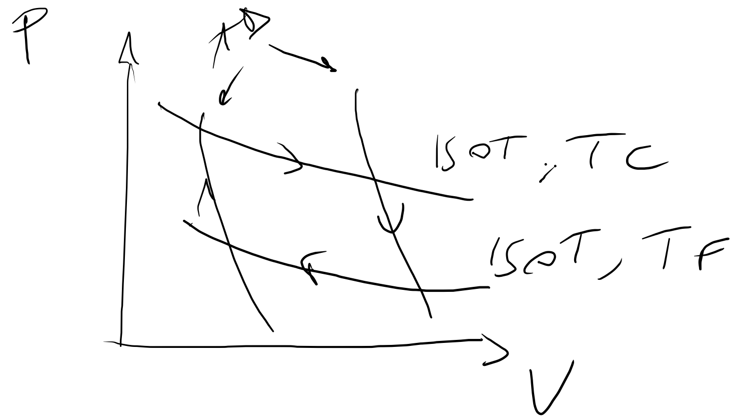
$\Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_C + \Delta S_F = \left(-\dfrac{10^{\cancel{3}}\,J}{6\cancel{0}\cancel{0}\,K} + \dfrac{75\cancel{0}\,J}{35\cancel{0}\,K} \right) = 0{,}48\,J/K$

b) $\boxed{\eta_C = \dfrac{L}{|Q_C|}} = \dfrac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|}$

$= 1 - \dfrac{|Q_F|}{|Q_C|}$

CARNOT

$\dfrac{|Q_F|}{T_F} = \dfrac{|Q_C|}{T_C}$ $= 1 - \dfrac{T_F}{T_C} < 1$



$L = -Q$

$L = \cancel{\Delta E_{int}} = m c_V \cdot \Delta T$

$L = \eta_C \cdot |Q_C| = |Q_C| \cdot \left(1 - \dfrac{T_F}{T_C}\right) = 10^3 J \left(1 - \dfrac{350\,\cancel{K}}{600\,\cancel{K}}\right)$

$\simeq 416 J$

c) $L_b - L_a = T_F \Delta S_U$

- $\boxed{\Delta S_U = \frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{|Q_C|}{T_C}}$ DAL PUNTO (a), $L_a = |Q_C| - |Q_F|$
$$= |Q_C| \left(1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}\right)$$
- $L_b = |Q_C| \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right)$

$$L_b - L_a = |Q_C| \left[\cancel{1} - \frac{T_F}{T_C} - \cancel{1} + \frac{|Q_F|}{|Q_C|} \right] = -|Q_C| \frac{T_F}{T_C} + |Q_F|$$

$$|Q_F| = \Delta S_U \cdot T_F + |Q_C| \cdot \frac{T_F}{T_C}$$

$$L_b - L_a = \cancel{-|Q_C| \frac{T_F}{T_C}} + \Delta S_U T_F + \cancel{|Q_C| \frac{T_F}{T_C}} = T_F \cdot \Delta S_U$$

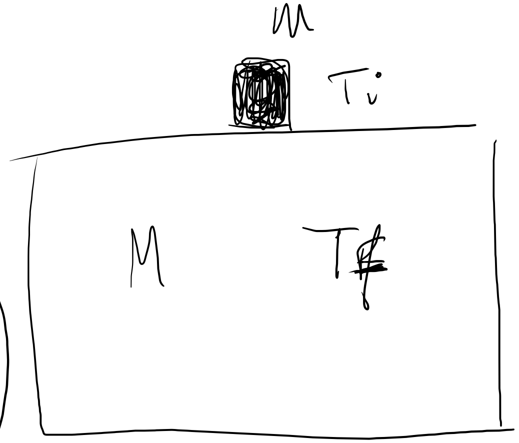
#4 Entropie

Una piccola massa m=1 kg d’acqua si trova inizialmente alla temperatura T_i=20°C. Essa viene posta in contatto termica con una grande quantità M=1800 kg di una sostanza che si trova alla temperatura T_F=80°C. Dopo un certo intervallo di tempo anche l’acqua ha raggiunto la temperatura T_F. Ricordando che il calore specifico dell’acqua vale 4.186 J/(g K), si calcolino:

a) La variazione di entropia dell’acqua;
b) La variazione di entropia dell’altra sostanza;
c) La variazione di entropia complessiva del sistema.

$T_i = 293\,K$

$T_f = 353\,K$



a) $\Delta S_a = ?$ $\quad L = 0$

$Q = m c_a \Delta T$

$$\Delta S_a = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ}{T} = m c_a \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = m c_a \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$= 10^3 \cancel{g}\, 4.186 \frac{J}{\cancel{g}K} \ln\left(\frac{353\,\cancel{K}}{293\,\cancel{K}}\right) = 780\ J/K$$

b) $$\Delta S_M = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_F}\int_i^f dQ = -Q/T_F = -\frac{m c_a \Delta T}{T_F} = -\frac{4186\, J/\cancel{K} \cdot 60\, \cancel{K}}{353\, K} = -711\ J/K$$

CALORE CEDUTO ALL'ACQUA

c) $\Delta S_a + \Delta S_M = (780 - 711)\,\frac{J}{K} = 69\ J/K$

#5 La doppia trasformazione

Un gas perfetto composto da n moli e calore specifico molare a pressione costante C_P, con stato iniziale $(P_i; V_i)$, compie due trasformazioni reversibili. La prima è un'espansione isoterma partendo dallo stato iniziale, mentre la seconda è una trasformazione adiabatica fino allo stato finale $(P_i; 3V_i)$.

a) Considerare una trasformazione isobara reversibile dallo stato iniziale a quello finale e calcolare la variazione di entropia del sistema utilizzando la relazione dQ=nC_PdT;

b) Calcolare la variazione di entropia del sistema nelle due trasformazioni compiute dal gas (isoterma+adiabatica).

Soluzioni

#1 Pistone e molla

a) $2.0 \cdot 10^4$ Pa
b) 0.032 moli
c) -142°C
d) -112 J
e) 7.5 J (sul sistema)
f) -119.5 J (ceduti)

#2 I due percorsi

a) 5304 J
b) 4636 J
c) 1

#3 La macchina termica

a) 0.476 J/K
b) 420 J

#4 Entropie

a) 779 J/K
b) -711 J/K
c) 68 J/K

#5 La doppia trasformazione

a) $\Delta S = n C_P \ln 3$
b) Uguale ad (a), l’entropia è funzione di stato