Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2021-2022, sessione estiva, I appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME STAMPATELLO	**NOME** LEGGIBILE
N. Matricola	**Anno di corso**

ESERCIZIO N. 1. Per $[t] \in \mathbb{Z}$ la parte intera di t, definita da $[t] \le t < [t]+1$, si calcoli al variare di $a > 0$ il valore del limite limite

$$L_a := \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{2x} \frac{4}{t^5+t^2+1}dt - \frac{15}{16}x^{-4}}{\tanh(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\int_x^{2x}[t]^{-a}dt}.$$

$$\int_x^{2x} \frac{4}{t^5+t^2+1}dt = 4\int_x^{2x} t^{-5}(1+t^{-3}+t^{-5})^{-1}dt =$$

$$= 4\int_x^{2x} t^{-5}(1-t^{-3}+o(t^{-3}))\,dt = 4\int_x^{2x} t^{-5}dt - 4\int_x^{2x} t^{-8}dt$$

$$+\int_x^{2x} o(t^{-8})\,dt = \underbrace{(1-2^{-4})}_{\frac{15}{16}}x^{-4} + \frac{4}{7}(2^{-7}-1)x^{-7} + o(x^{-7})$$

$$\Rightarrow \text{Num} = \frac{4}{7}(2^{-7}-1)x^{-7}(1+o(1))$$

$$\text{den} = (1+o(1))\,x^{-1}\int_x^{2x}(t+[t]-t)^{-a}dt =$$

$$= (1+o(1))\,x^{-1}\int_x^{2x} t^{-a}\left(1+\frac{[t]-t}{t}\right)^{-a}dt$$

$$= (1+o(1))\,x^{-1}\int_x^{2x} t^{-a}(1+o(1))\,dt$$

$$= (1+o(1))\,x^{-1}\left.\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_x^{2x} + o(x^{-a}) \quad \text{per } a\neq 1$$

$$= (1+o(1))\frac{2^{1-a}-1}{-a+1}x^{-a}$$

$$\Rightarrow L_a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{7}(2^{-7}-1)}{\frac{2^{1-a}-1}{1-a}}x^{a-7} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>7 \\ \dfrac{\frac{4}{7}(2^{-7}-1)}{\frac{2^{1-a}-1}{1-a}} & \text{se } a=7 \\ 0 & \text{se } a<7 \end{cases}$$

Se $a=1$ si ottiene anche $a=-\infty$

ESERCIZIO N. 2. Trovare il numero delle soluzioni di $z^5 + |z|^2 = 1$.

I coordinate polari $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$r^5\cos(5\vartheta) + r^2 + i\, r^5 \sin(5\vartheta) = 1 \iff$

$$\begin{cases} r^5\cos(5\vartheta) + r^2 = 1 \\ r^5 \sin(5\vartheta) = 0 \end{cases}$$

dalla 2° equazione ricaviamo o $r = 0$, che non dà soluzioni del sistema, oppure $\sin(5\vartheta) = 0 \Rightarrow \cos(5\vartheta) \begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}$

Per $\cos(5\vartheta) = -1$ otteniamo $r^2 = 1 + r^5$ che non ha soluzioni $r \geq 0$ perché se $0 < r \leq 1$ abbiamo $r^2 \leq 1 < 1 + r^5$. Per $r > 1$ abbiamo invece $r^2 < r^5 < 1 + r^5$.

Per $\cos(5\vartheta) = 1$ abbiamo l'equazione $r^5 + r^2 = 1$. Per sapere quante soluzioni $r > 0$ ha, consideriamo $g(r) \doteq r^5 + r^2 - 1$. $g(0) = -1$, $\lim_{r\to+\infty} g(r) = +\infty$.

Questo significa dal teor. degli zeri che ci sono soluzioni di $g(r) = 0$. Inoltre, $g'(r) = 5r^4 + 2r > 0 \ \forall r > 0$ implica che $g(r)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

Quindi $\exists!\ r_0 \geq 0$ con $g(r_0) = 0$. Infine la nostra equazione ha 5 soluzioni complesse

$\vartheta = 2\pi \frac{k}{5}$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ed $r = r_0$

COGNOME e NOME Stampatello Leggibile N. Matricola

Si consideri

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}dt & \text{se } x>0\\ \displaystyle\int_0^x \frac{1+t}{1+t+t^2}dt & \text{se } x<0.\end{cases}$$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; Siccome $\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} = t^{-1}(1+o(1))$ per $t\to+\infty$, segue per Aut-aut $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Analogamente $\frac{1+t}{1+t+t^2} = t^{-1}(1+o(1))$ per $t\to-\infty$, per Aut-aut segue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

- si calcoli $f'(x)$ e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti; Dal teor fond calcolo

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} & \text{per } x>0\\ \frac{1+x}{1+x+x^2} & \text{per } x<0\end{cases}$$

$$\underbrace{f'_d(0)=1=f'_s(0)} \Downarrow f'(0)=1$$

Notare che $f'(x)=0 \iff x=-1$. Segue che $x=-1$ e' il punto di minimo assoluto

- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

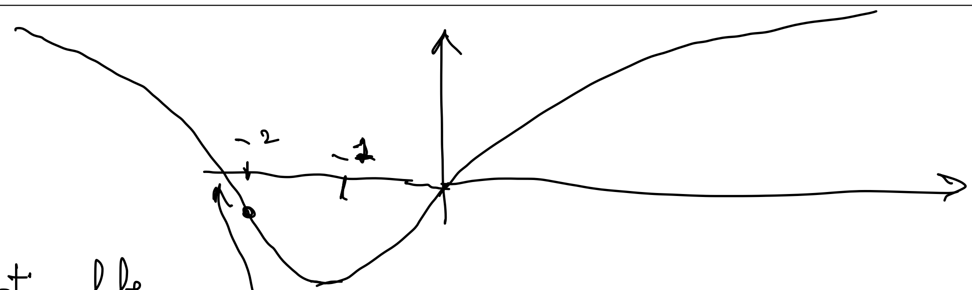
per $x>0$ $f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \quad \forall x>0$

per $x<0$ $f''(x) = \frac{(1+x+x^2)-(1+x)(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{\cancel{1}+x+x^2-(\cancel{1}+3x+2x^2)}{\text{denom}} =$

$= \frac{-x^2-2x}{\text{denom}} = \frac{-x(x+2)}{\text{denom}} = 0$ per $x=-2$

- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico .

$f(x)$ cresce logaritmicamente per $x\to\pm\infty$ (quindi è concava vicino a $\pm\infty$) e non ha rette asintotiche, e in corrispondenza al minimo assoluto -1 è convessa



Si potrebbe controllare dove esattamente si annulla.

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt$

(i) Calcolare tutti i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di f.

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j t^{4j} + o(t^{4n}) \right) dt =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{4j+1}}{4j+1}}_{P_{4n+1}} + o(x^{4n+1})$$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^j + E_n(y) \qquad o(t^{4n}) = E_n(t^4)$$

(ii) Per ogni n si dia una stima dell'errore $f(x) - p_n(x)$ per $x \in (0,1)$.

Qui $\quad E_n(y) = \dfrac{\left((1+y)^{-1}\right)^{(n+1)}\Big|_{y=c}}{(n+1)!} y^{n+1} \quad$ per un $0<c\le y$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (-\cancel{1} - (j-\cancel{1}))}{(n+1)!} (1+c)^{-(n+2)} y^{n+1}$$

$$= (1+c)^{-(n+2)} y^{n+1} \le y^{n+1}$$

Cioè $\quad \left| f(x) - P_{4n+1}(x) \right| \le \displaystyle\int_0^x t^{4n+4} dt = \frac{x^{4n+5}}{4n+5}$