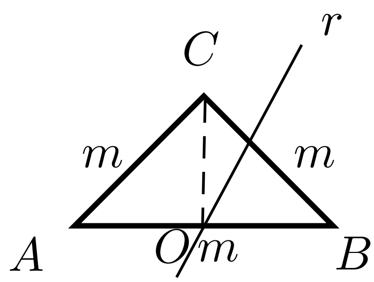
Compito di Meccanica Razionale

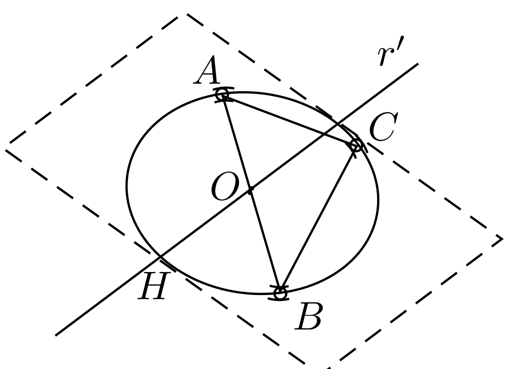
Trieste, 11 luglio 2022

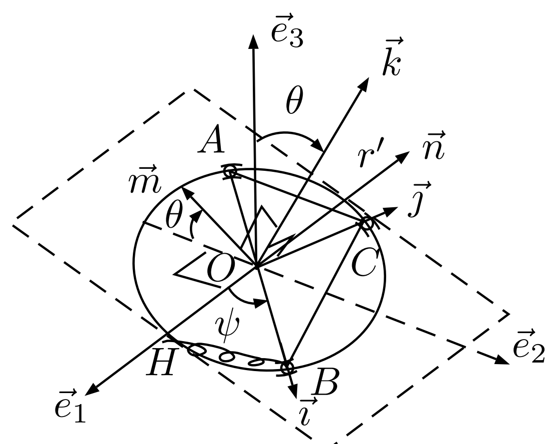
(G. Tondo)



È dato un telaio rigido *non* omogeno, formato da 3 aste, ciascuna omogenea e di massa m, saldate a forma di triangolo rettangolo isoscele con ipotenusa AB di lunghezza pari a $2R$,

1) Determinare il baricentro e il momento d'inerzia del telaio rispetto all'asse r, passante per il punto O, medio di AB, e inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il telaio suddetto è vincolato, mediante tre appoggi lisci e bilateri nei vertici A, B, C, a scorrere all'interno di una guida circolare, di raggio R e massa trascurabile. Tale guida, a sua volta, è vincolata a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale r' passante per il centro della guida. Il telaio è soggetto al peso proprio e all'azione di una molla di costante elastica c, fissata in H e nel vertice B.

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del telaio in funzione delle coordinate $-\pi < \theta, \psi \leq \pi$ e del parametro $\lambda = -\frac{cR}{mg}$. Poi, disegnarle e discutere la loro stabilità.

3) determinare le reazioni vincolari nel punto C, nelle configurazioni di equilibrio stabile.

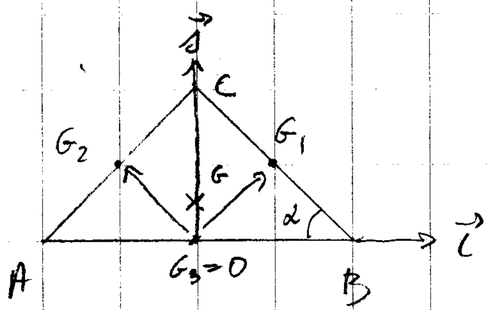
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio stabile, calcolare l'integrale generale e dire se il moto complessivo è periodico o quasi-periodico;

6) dire se il telaio ammette un asse d'istantanea rotazione e, in caso affermativo, come si può determinare (giustificando la risposta).

1) Il baricentro G si trova nella bisettrice CO che è un asse di simmetria materiale del telaio ed è interno al segmento CO. Per determinare la sua esatta posizione utilizziamo la proprietà distributiva ripartendo il telaio nelle 3 aste, che hanno tutte massa pari ad m.



$$(1.2)\quad G-O = \frac{m\,(G_1-O) + m\,(G_2-O) + m\,\cancel{(G_3-O)}}{3m}$$

$$= \frac{(G_1-O+G_2-O)}{3m} = \left[\frac{R}{2}(\cancel{\vec{i}}+\vec{j}) + \frac{R}{2}(\cancel{-\vec{i}}+\vec{j})\right] =$$

$$= \frac{R}{3}\vec{j}$$

Determiniamo la matrice d'inerzia $[I_O]$ rispetto alla terna $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ che è una $TPI(O)$ poiché $(O;\vec{j})$ è un asse di simmetria materiale ortogonale.

Allora:

$$[I_O] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_O(\vec{i}) & I_O(\vec{j}) & I_O(\vec{k}) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{array}\right] \end{array}$$

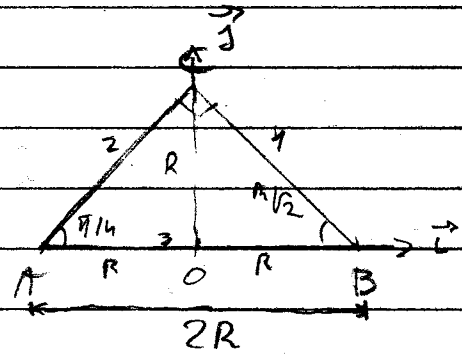
$$I_{11} = I_{11}^{(1)} + I_{11}^{(2)} + \cancel{I_{11}^{(3)}} = 2I_{11}^{(1)} = 2\left(\frac{1}{3}m(R\sqrt{2})^2 \sin^2\alpha\right) = \frac{2}{3}mR^2\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{3}mR^2$$

$$I_{22} = I_{22}^{(1)} + I_{22}^{(2)} + I_{22}^{(3)} = 2I_{22}^{(1)} + I_{22}^{(3)} = 2I_{11}^{(1)} + I_{22}^{(3)} = \frac{2}{3}mR^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 = mR^2$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{5}{3}mR^2$$

Quindi,

$$[I_O] = mR^2\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$



Per calcolare I_r, possiamo scrivere

$$I_r = \vec{e}_r \cdot \mathbb{I}_0 (\vec{e}_r) = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] mR^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[1, \sqrt{3}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} mR^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) mR^2 = \boxed{\frac{11}{12} mR^2}$$

Cinematica: $l = 2$ del metodo dei congelamenti.

Consideriamo le basi disegnate in figura:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: fissa ($\vec{e}_3$ verticale ascendente)

$\mathcal{B}' = (\vec{n}, \vec{m}, \vec{K})$: intermedia ($\vec{n} = -\vec{e}_1$, $\vec{m} \perp \vec{n}$ et $\vec{m} \in \Pi$, $\vec{K} \perp \Pi$)

$\mathcal{B}''' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$: solidale

Le trasformazioni fra le basi sono:

$$(2.1)\quad \begin{cases} \vec{n} = -\vec{e}_1 \\ \vec{m} = -\cos\theta\, \vec{e}_2 + \sin\theta\, \vec{e}_3 \\ \vec{K} = \sin\theta\, \vec{e}_2 + \cos\theta\, \vec{e}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{n} \\ \vec{e}_2 = -\cos\theta\, \vec{m} + \sin\theta\, \vec{K} \\ \vec{e}_3 = \sin\theta\, \vec{m} + \cos\theta\, \vec{K} \end{cases}$$

$$(2.2)\quad \begin{cases} \vec{i} = -\cos\psi\, \vec{n} - \sin\psi\, \vec{m} \\ \vec{j} = \sin\psi\, \vec{n} - \cos\psi\, \vec{m} \\ \vec{k} = \vec{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{n} = -\cos\psi\, \vec{i} + \sin\psi\, \vec{j} \\ \vec{m} = -\sin\psi\, \vec{i} - \cos\psi\, \vec{j} \\ \vec{K} = \vec{k} \end{cases}$$

Quindi

$$(2.3)\quad G - O = \frac{R}{3}\vec{j} = \frac{R}{3}\left(\sin\psi\, \vec{n} - \cos\psi\, \vec{m}\right) = \frac{R}{3}\left(-\sin\psi\, \vec{e}_1 - \cos\psi\left(-\cos\theta\, \vec{e}_2 + \sin\theta\, \vec{e}_3\right)\right)$$

$$(2.4)\quad B - H = (B - O) + (O - H) = R\vec{i} - R\vec{e}_1 \overset{(2.1)}{=} R\left(\vec{i} + \vec{n}\right) \overset{(2.2)}{=} R\left[\left(1 - \cos\psi\right)\vec{i} + \sin\psi\, \vec{j}\right]$$

$$(2.5)\quad (B - H)^2 = R^2\left[\left(1 - \cos\psi\right)^2 + \sin\psi^2\right] = R^2\, 2\left(1 - \cos\psi\right)$$

Statica: modello rigido

2) Poiché l'unica sollecitazione attiva, la forza peso, è conservativa, per trovare gli equilibri possiamo usare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale.

(3.1) $$V(\theta,\psi) = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G = -3m\vec{g}\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c|B-H|^2$$

$$= 3mg\vec{e}_3\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c|B-H|^2 \overset{(2.3)\,e\,(2.5)}{=} 3mg\frac{R}{3}\sin\theta\cos\psi + cR^2(1-\cos\psi)$$

Quindi,

(3.2) $$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -Q_\theta = -mgR\cos\theta\cos\psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial\psi} = -Q_\psi = +mgR\sin\theta\sin\psi + cR^2\sin\psi$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

(3.3) $$\begin{cases}\cos\theta\cos\psi = 0\\ \sin\psi\,(cR^2 + mgR\sin\theta)\end{cases} \iff i)\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\psi = 0\end{cases} \text{ vel } ii)\begin{cases}\sin\theta = \dfrac{-cR^2}{mgR}\\ \cos\psi = 0\end{cases}$$

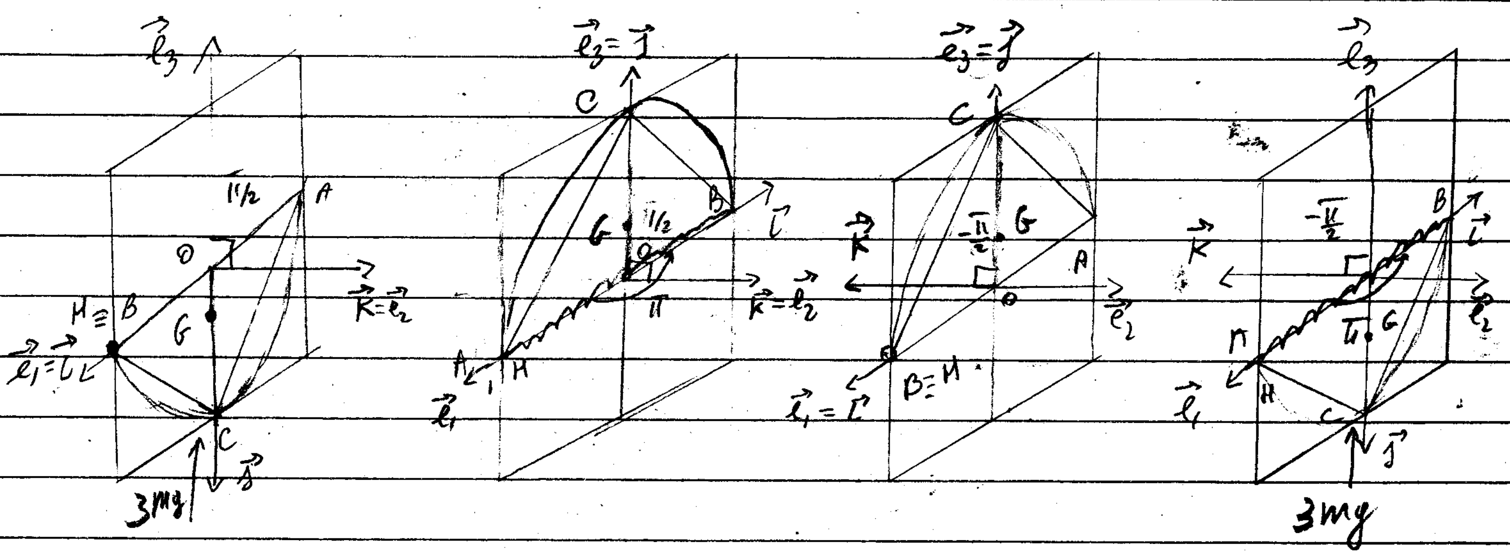
$$iii)\begin{cases}\cos\psi = 0\\ \sin\psi = 0\end{cases} \text{ vel } iv)\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = -\dfrac{cR}{mg}\end{cases}$$

Le configurazioni di equilibrio $q_e = (\theta_e, \psi_e)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema i), ii), iii) e iv).
Ovviamente, il sistema iii) non ha alcuna soluzione, mentre il sistema iv) ha un'unica soluzione se $\lambda := \frac{3cR}{mg} = -1$, cioè

$\lambda = -1$ $\qquad \theta_e = \frac{-\pi}{2}, \ \forall\psi \Rightarrow q_e^{(9)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \psi\right) \ -\pi < \psi \leq \pi$

Il sistema i) ha soluzioni $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$; $\varphi = 0, \pi$, quindi

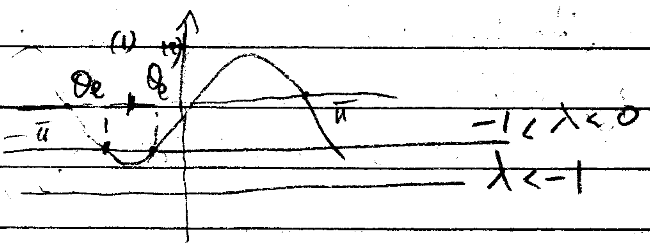
$$q_e^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad q_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad q_e^{(3)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad q_e^{(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$



Le soluzioni del sistema ii) si possono trovare risolvendo la prima equazione

(4.1) $\sin\theta = \lambda \qquad \lambda := -\frac{cR}{mg}$

Graficamente, se $-1<\lambda<0$



$\theta_e^{(1)} = -\left(\pi + \theta_e^{(2)}\right), \quad -\pi < \theta_e^{(1)} < -\frac{\pi}{2}$

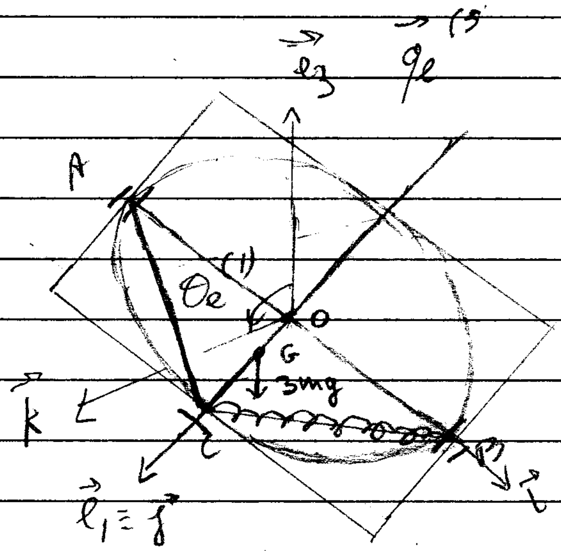
$\theta_e^{(2)} = \arcsin\lambda, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_e^{(2)} < 0$

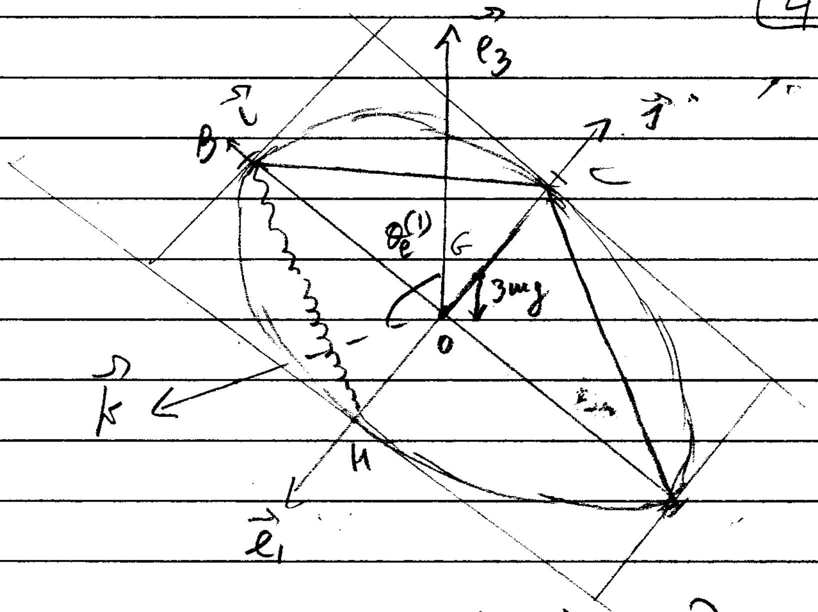
L'altra eq: $\cos\varphi = 0$ ha soluzioni $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

Dunque, se $-1<\lambda<0$ $\exists$ le soluzioni di equilibrio

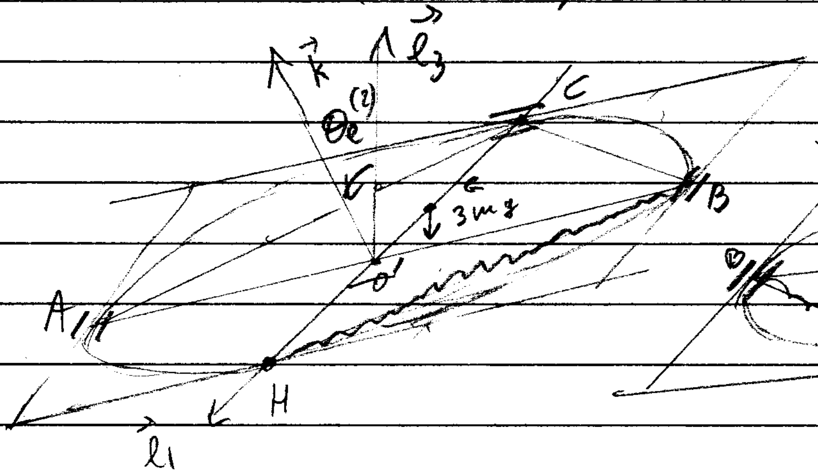
$$q_e^{(5)} = \left(\theta_e^{(1)}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad q_e^{(6)} = \left(\theta_e^{(1)}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

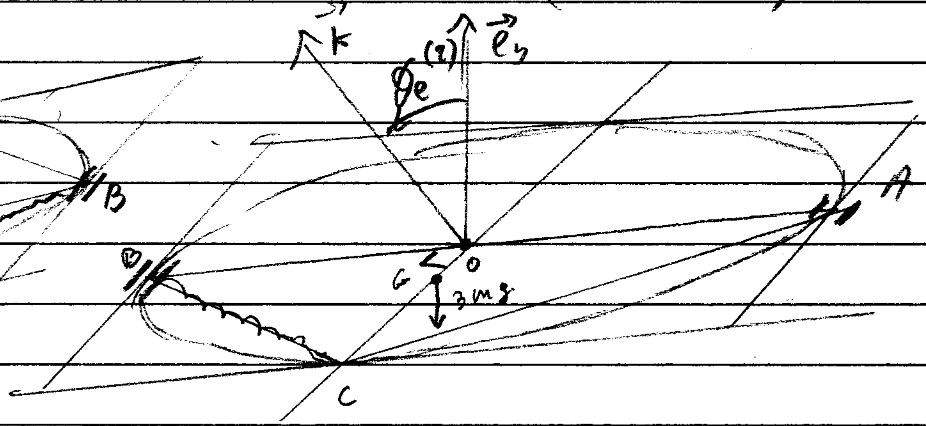
$$q_e^{(7)} = \left(\theta_e^{(2)}, +\frac{\pi}{2}\right), \qquad q_e^{(8)} = \left(\theta_e^{(2)}, -\frac{\pi}{2}\right)$$



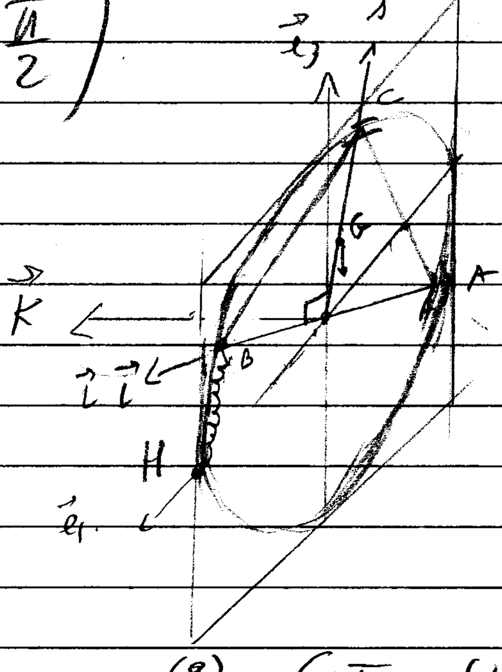


$$q_e^{(5)} = \left(\theta_e^{(1)}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad q_e^{(6)} = \left(\theta_e^{(1)}, -\frac{\pi}{2}\right)$$





$$q_e^{(7)} = \left(\theta_e^{(2)}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad q_e^{(8)} = \left(\theta_e^{(2)}, -\frac{\pi}{2}\right)$$



$$q_e^{(9)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$$

Calcoliamo la matrice Hessiana di V. Dalla (3.2) segue,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgR \sin\theta \cos\psi \,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial \theta} = mgR \cos\theta \sin\psi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \psi} = mgR \cos\theta \sin\psi \,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \left(mgR \sin\theta + cR^2\right)\cos\psi$$

Quindi

$$\mathcal{H}(\theta,\psi) = mgR \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \left(\sin\theta + \frac{cR}{mg}\right)\cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}(\theta,\psi) = mgR \sin\theta\cos\psi \,, \quad \det\mathcal{H} = (mgR)^2\Big[\cos^2\psi \sin\theta\Big(\sin\theta + \overbrace{\tfrac{cR}{mg}}^{-\lambda}\Big) - \cos^2\theta\sin^2\psi\Big]$$

Quindi,

$$\mathcal{H}_{11}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right) = mgR > 0 \,, \quad \mathcal{H}_{11}\left(\tfrac{\pi}{2},\pi\right) = -mgR < 0 \,, \quad \mathcal{H}_{11}\left(-\tfrac{\pi}{2},0\right) = -mgR < 0$$

$$\mathcal{H}_{11}\left(-\tfrac{\pi}{2},\pi\right) = mgR > 0 \,, \qquad \det\mathcal{H}_{|q_e^{(1)}} = (mgR)^2(1-\lambda) > 0$$

Dunque,
$$\det\mathcal{H}_{|q_e^{(4)}} = (mgR)^2\left[-(-1-\lambda)\right] = (mgR)^2(1+\lambda)$$

$q_e^{(1)}$ è stabile

$$q_e^{(4)} \begin{cases} \text{è dubbio} & \text{se } \lambda = -1 \Rightarrow \det\mathcal{H}_{|q_e^{(4)}} = 0, \\ \text{è stabile} & \text{se } \lambda > -1 \Rightarrow \det\mathcal{H}_{|q_e^{(4)}} > 0 \\ \text{è instabile} & \text{se } \lambda < -1 \Rightarrow \det\mathcal{H}_{|q_e^{(4)}} < 0 \end{cases}$$

Inoltre, le configurazioni $q_e^{(i)}$ $i = 5,6,7,8$ sono instabili poiché

$$\mathcal{H}_{11} = 0 \,, \quad \det\mathcal{H} = (mgR)^2(-\cos^2\theta) < 0 \text{ se } \lambda \neq -1$$

Infine, anche il caso $q_e^{(9)}$ è dubbio poiché $\det\mathcal{H}_{|q_e^{(9)}} = 0$.

3) Reazioni vincolari in C agli equilibri: $q_e^{(1)}$ $\forall\lambda$, $q_e^{(4)}$ $\lambda>1$

Poiché i tre vincoli sono appoggi lisci, le reazioni vincolari si possono schematizzare come

$$\mathcal{L}^{reat}=\left\{\left(A,\vec{\phi}_A\right),\left(B,\vec{\phi}_B\right),\left(C,\vec{\phi}_C\right)\right\} \quad \text{con } \vec{\phi}_A\cdot\vec{j}=\vec{\phi}_B\cdot\vec{j}=\vec{\phi}_C\cdot\vec{i}=0$$

Inoltre, poiché nelle configurazioni suddette, le reazioni saranno tutte nel piano della guida, si ha

$$\vec{\phi}_A=\phi_A\vec{i},\ \vec{\phi}_B=\phi_B\vec{i},\ \vec{\phi}_C=\phi_C\vec{j}$$

Allora, dalle ECS segue:

$$\begin{cases}\vec{R}^{(est,att)}+\vec{R}^{(est,reat)}=\vec{0}\\ \vec{M}_C^{(est,att)}+\vec{M}_C^{(est,reat)}=\vec{0}\end{cases} \iff \begin{cases}3m\vec{g}-c(B-H)+\vec{\phi}_A+\vec{\phi}_B+\vec{\phi}_C=\vec{0}\\ \cancel{(G-C)\times m\vec{g}}+(A-C)\times\vec{\phi}_A+(B-C)\times\vec{\phi}_B+\\ +(B-C)\times\vec{F}_B^{(el)}=\vec{0}\end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}-3mg\,\vec{e}_3-cR\left[(1-\cos\varphi)\vec{i}+\cancel{\sin\varphi\,\vec{j}}\right]+(\phi_A+\phi_B)\vec{i}+\phi_C\vec{j}=\vec{0}\\ \phi_B\cancel{R}\vec{k}+\phi_A\cancel{R}\vec{k}-cR^{\cancel{2}}(1-\cos\varphi)\vec{k}=\vec{0}\end{cases}$$

Dunque

$$q_e^{(1)}=\left(\frac{\pi}{2},0\right) \quad \begin{cases}-\phi_C+3mg=0\\ \phi_A+\phi_B=0\\ \phi_A+\phi_B=0\end{cases} \quad \begin{cases}\phi_C=-3mg\\ \phi_A=-\phi_B\end{cases}$$

$$q_e^{(4)}=\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right) \quad \begin{cases}\phi_C-3mg=0\\ -2cR+\phi_A+\phi_B=0\\ \phi_A+\phi_B-2cR=0\end{cases} \quad \begin{cases}\phi_C=3mg\\ \phi_A+\phi_B=2cR\end{cases}$$

Dinamica

4) Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica della lamina (con punto fisso O)

$$(7.1)\quad K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_0(\vec{\omega})$$

dove, per il Teo di Frisi, abbiamo

$$(7.2)\quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_1 + \dot{\psi}\,\vec{K} \overset{(2.2)}{=} \dot{\theta}\left(\cos\psi\,\vec{i} - \sin\psi\,\vec{j}\right) + \dot{\psi}\,\vec{K}$$

Quindi

$$(7.3)\quad K = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}\cos\psi, -\dot{\theta}\sin\psi, \dot{\psi}\right] mR^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2\left(\frac{2}{3}\,\dot{\theta}^2\cos^2\psi + \dot{\theta}^2\sin^2\psi + \frac{5}{3}\,\dot{\psi}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2\left[\left(\frac{2}{3}\cos^2\psi + \sin^2\psi\right)\dot{\theta}^2 + \frac{5}{3}\,\dot{\psi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} mR^2\left[\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\psi\right)\dot{\theta}^2 + \frac{5}{3}\,\dot{\psi}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}, \dot{\psi}\right] mR^2 \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\psi\right) & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Eq. di Lagrange

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = m R^2 \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi\right)\dot\theta \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = m R^2 \left[\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi\right)\ddot\theta + \frac{2}{3}\cos\varphi \sin\varphi\, \dot\varphi\, \dot\theta\right]$$

$$EL_\theta : \quad m R^2 \left[\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi\right)\ddot\theta + \frac{1}{3}\sin 2\varphi\, \dot\varphi\, \dot\theta\right] = m g R \cos\theta \cos\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = m R^2 \frac{5}{3}\dot\varphi \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{5}{3} m R^2 \ddot\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = m R^2 \left(\frac{1}{3}\cos\varphi \sin\varphi\right)\dot\theta^2$$

$$EL_\varphi : \quad \frac{5}{3} m R^2 \ddot\varphi - \frac{m R^2}{6}\sin 2\varphi\, \dot\theta^2 = -\left(m g R \sin\theta + c R^2\right)\sin\varphi$$

5) Linearizzazione dell EL in $q_e^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $q_e^{(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Poichè la sollecitazione è conservativa, possiamo scrivere

$$A \underline{\ddot{x}} + V \underline{x} = \underline{0} \qquad \varepsilon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

con

$$A = A(q_e) \quad , \quad V = \mathcal{H}_V(q_e)$$

Quindi

$$mR^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3}\cos^2\varphi_e & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + mgR \begin{bmatrix} \sin\theta_e \cos\varphi_e & \cos\theta_e \sin\varphi_e \\ \cos\theta_e \sin\varphi_e & (\sin\theta_e - \lambda)\cos\varphi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque, in $q_e^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} R \ddot{x}_1 + g \, x_1 = 0 \\ \frac{5}{3} R \ddot{x}_2 + g \, (1-\lambda) x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{g}{R}\frac{3}{2} x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 3\frac{g}{5R}(1-\lambda) \, x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema linearizzato è

$$x_1 = a_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1) \, , \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{g3}{R2}}$$

$$x_2 = a_2 \cos(\nu_2 t + \alpha_2) \, , \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{3g}{5R}(1-\lambda)}$$

Quindi,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{5}{2}(1-\lambda)} \in \mathbb{Q} \iff \frac{5}{2}(1-\lambda) = \frac{p^2}{q^2} \iff \lambda = 1 - \frac{2}{5}\frac{p^2}{q^2} \, , \, p, q \in \mathbb{N}$$

Es.: $\lambda = -9 \Rightarrow$ moto periodico

Dunque, in $q_e^{(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} R \ddot{x}_1 + g \, R \, x_1 = 0 \\ \frac{5}{3} R \ddot{x}_2 + g (1+\lambda) x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generalizzato di tale sistema è

$x_1 = a_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1)$, $\quad \nu_1 = \sqrt{\frac{3g}{2R}}$

$$x_2 = \begin{cases} a_2 \cos(\nu_2 t + \alpha_2) & \text{se } -1 < \lambda < 0 \\ a_2 \cosh(\nu_2 t + \alpha_2) & \text{se } \lambda < -1 \end{cases} \qquad \nu_2 := \sqrt{\frac{3g}{5R}|1+\lambda|}$$

Quindi,

se $-1 < \lambda < 0$ $\quad x_1$ e x_2 sono moti armonici, mentre il moto complessivo è periodico se e solo se $\sqrt{\frac{5}{2}(1+\lambda)} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{5}{2}(1+\lambda) = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}\frac{p^2}{q^2} - 1$, $p, q \in \mathbb{N}$. Es.: $\lambda = -\frac{9}{10}$

se $\lambda < -1$ $\quad x_2$ è un moto iperbolico.

6) Il moto della lamina è un moto con punto fisso O.
Quindi,

$$\vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow I = \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} = 0$$

Allora, agli istanti t nei quali $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$
il campo delle velocità è rototorio e l'asse di Mozzi diventa asse d'istantanea rotazione per O.
Tale asse passa per O, poichè $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ed è parallelo col $\vec{\omega}$.