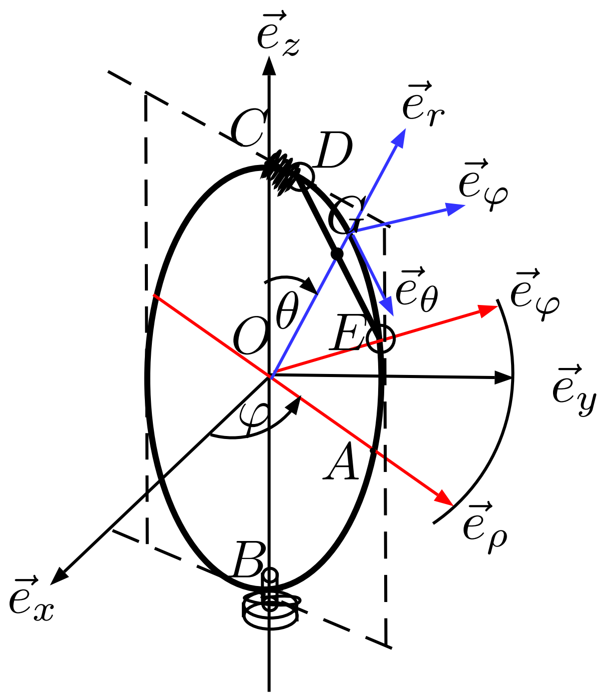
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 13 febbraio 2023

(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa $3\,m$ e raggio R, è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante una cerniera cilindrica fissa in B. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza R ha gli estremi D ed E vincolati sulla circonferenza con due cerniere sferiche scorrevoli. Una molla di costante elastica b collega l'estremo dell'asta D con il punto C dell'*asse fisso*, a distanza $2R$ da B. Una molla angolare di richiamo, di costante elastica c, è fissata in B (nella sua configurazione di riposo il punto A, punto medio di una delle semicirconferenze $\widehat{BC}$, si trova sull'asse $(O, \vec{e}_x)$. Tutti i vincoli sono supposti lisci e bilateri. Scelte come coordinate libere gli angoli $0 \le \varphi < 2\pi$ e $0 \le \theta < 2\pi$ della figura, si chiede di:

STATICA

1) Individuare le configurazioni di equilibrio del modello, disegnarle e discuterne la stabilità in funzione del parametro $\lambda = 1 - \frac{mg}{br}$;

2) determinare le reazioni vincolari esterne sull'anello nel punto B nelle configurazioni di equilibrio;

3) determinare le reazioni vincolari dell'anello sull'asta nei punti D ed E nelle configurazioni di · equilibrio.

DINAMICA

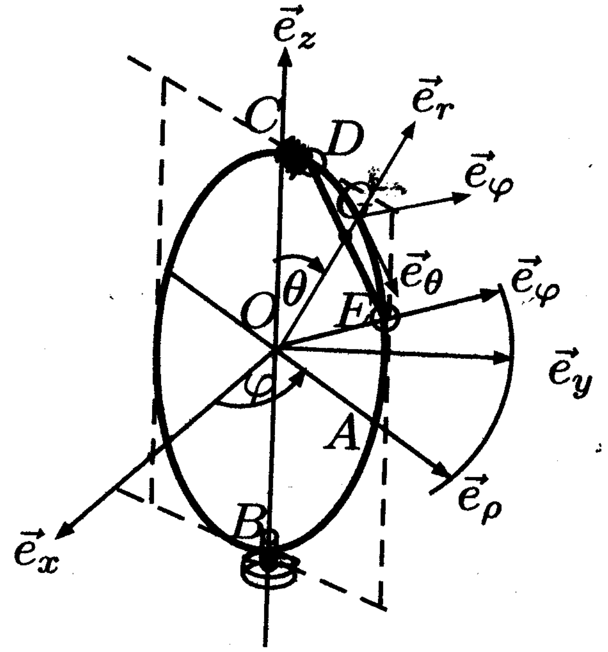
4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio, trovarne l'integrale generale ed, eventualmente, le frequenze delle piccole oscillazioni;

6) classificare il moto dell'asta DE (giustificando la risposta).

Tema del 13/02/2023

Il modello è formato da un rigido con asse fisso, l'anello, e un altro rigido, l'asta, vincolato al primo. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi, può essere descritto dalle coordinate libere della figura $q = (\varphi, \theta)$ con



$$0 \leq \varphi < 2\pi \,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \,.$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: solidale all'anello

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale all'asta

$$(1.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

(2.1) $\vec{x}_G = G - O = \overline{OG}\;\vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$

(2.2) $G - B = (G-O) + (O-B) = \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r - R\,\vec{e}_z$

(2.3) $C - D = (C-O) + (O-D) = C - O + (O-G) + (G-D) = R\,\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r + \frac{R}{2}\vec{e}_\theta$

$=$

$$|C-D|^2 = R\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right) \cdot R\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right)$$

(2.4)
$$= R^2\left(1 - \sqrt{3}\,\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta + \frac{3}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= R^2\left(1 - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) =$$
$$= R^2\left(2 - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right)$$

(2.5) $D - O = (D-G) + (G-O) = -\frac{R}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r$

(2.6) $E - O = (E-G) + (G-O) = \frac{R}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r$

(2.7) $D - B = (D-O) + (O-B) = -\frac{R}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r + R\,\vec{e}_z$

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa poiché è costituita dal peso proprio del modello e dalla forza di richiamo delle molle che hanno, entrambe, un estremo fisso. Dunque, possiamo utilizzare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale V per trovare le configurazioni di equilibrio.

$$V(\varphi,\theta) = -M\,\cancel{\vec{x}_O\cdot\vec{g}} - m\,\vec{x}_G\cdot\vec{g} + \frac{1}{2}\left(b\,\overline{CD}^2 + c\,\varphi^2\right)$$

(3.1) $$= -m\,\frac{\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_\rho\cdot\left(-g\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}\,bR^2\left(2-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\,c\,\varphi^2$$

$$= mg\,\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta + \frac{1}{2}\,bR^2\left(2-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right) + \frac{1}{2}\,c\,\varphi^2$$

Calcoliamo i punti stazionari della funzione V

(3.2) $$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = c\,\varphi = -Q_\varphi$$

(3.3) $$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mg\,\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\,bR^2\sin\theta - \frac{1}{2}\,bR^2\cos\theta = -Q_\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(-mg+bR\right)\sin\theta - \frac{1}{2}\,bR^2\cos\theta = -Q_\theta$$

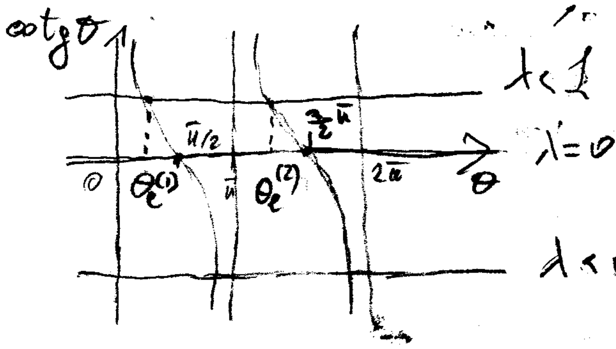
Quindi, dobbiamo risolvere il sistema

(3.4) $$\begin{cases} c\,\varphi = 0 \\ bR\cos\theta = \sqrt{3}\left(-mg+bR\right)\sin\theta \end{cases}$$

Poiché $\theta=0$ NON è soluzione della II eq., il sistema (3.4) equivale a

(3.5) $$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \cot\theta = \sqrt{3}\left(1-\frac{mg}{bR}\right) = \sqrt{3}\,\lambda \end{cases} \qquad \lambda := 1-\frac{mg}{bR}$$

Come al solito, risolviamo la II eq. del sistema (3.5) graficamente



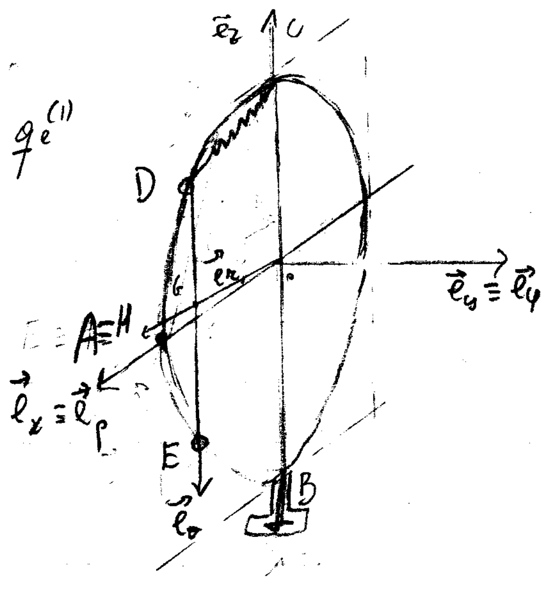
E' evidente che $\forall\, \lambda < 1$
la II eq. ha 2 soluzioni date da

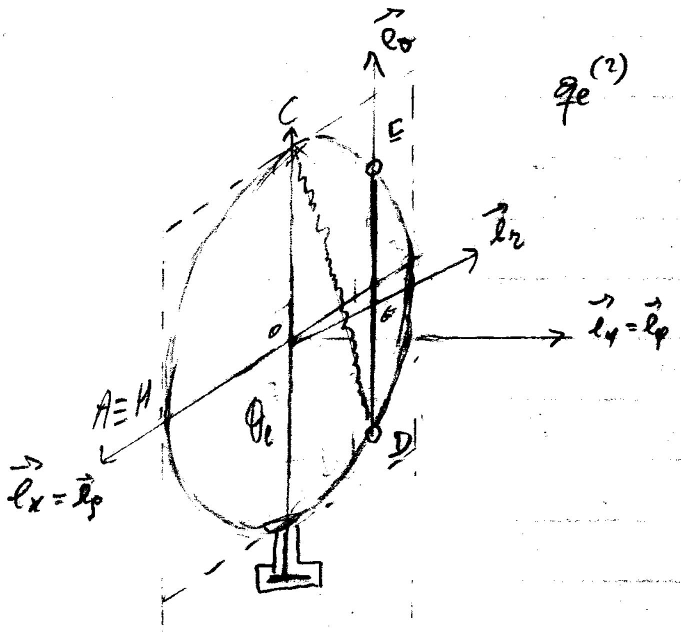
$$\theta_e^{(1)} = \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\,\lambda\right) \qquad 0<\theta_e^{(1)}<\pi$$

$$\theta_e^{(2)} = \theta_e^{(1)} + \pi \qquad \pi<\theta_e^{(2)}<2\pi$$

Dunque, il modello ammette 2 configurazioni di equilibrio

$$q_e^{(1)} = \left(0,\ \theta_e^{(1)}\right) \qquad q_e^{(2)} = \left(0,\ \theta_e^{(1)}+\pi\right)$$





$$\sin\theta_e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+3\lambda^2}} \quad \wedge \quad \sin\theta_e^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{1+3\lambda^2}}$$

$$\cos\theta_e^{(1)} = \pm\sqrt{\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{3\lambda^2}{1+3\lambda^2}} & \lambda>0 \\ 0 & \lambda=0 \\ -\sqrt{\dfrac{3\lambda^2}{1+3\lambda^2}} & \lambda<0 \end{cases} \qquad , \quad \cos\theta_e^{(2)} = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{3\lambda^2}{1+3\lambda^2}} & \lambda>0 \\ 0 & \lambda=0 \\ \sqrt{\dfrac{3\lambda^2}{1+3\lambda^2}} & \lambda<0 \end{cases}$$

Per studiarne la stabilità applichiamo i Teo. di Dirichlet-Lagrange e di . Quindi, calcoliamo la matrice Hessiana di V nelle configurazioni di equilibrio.

$$(5.1)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = c \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R(-mg + bR)\cos\theta + \frac{1}{2} bR^2 \sin\theta$$

$$= + \frac{bR^2}{2}\left(\sqrt{3}\,\lambda \cos\theta + \sin\theta\right)$$

Quindi,

$$(5.2)\quad \mathcal{H}_{V|q_e} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{bR^2}{2} \sin\theta_e \,(3\lambda^2+1) \end{bmatrix}$$

Dunque

$$(5.3)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(1)}} = c > 0 \quad , \quad \det \mathcal{H}\Big|_{q_e^{(1)}} = cR^2 \frac{bR^2}{2} \sin\theta_e^{(1)} (3\lambda^2+1) > 0$$

$\Rightarrow q_e^{(1)}$ è un punto di min $\Rightarrow$ stabile

$$(5.4)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(2)}} = c > 0 \quad , \quad \det \mathcal{H}\Big|_{q_e^{(2)}} = \frac{bcR^4}{2} \sin\theta_e^{(2)} (3\lambda^2+1) < 0$$

$\Rightarrow q_e^{(2)}$ è un punto di max per $V \Rightarrow$ instabile

2) Reazioni vincolari in B e C nell'anello, agli equilibri

Dall'ipotesi di vincoli lisci, segue che

$$\mathcal{L}^{(est, reat)} = \{ (B, \vec{\Phi}), \vec{\mu} \} \text{ con } \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Comunque, poiché in tutte le configurazioni di equilibrio $\varphi = 0$, il problema si riduce ad un problema piano, cioè

$$\vec{\Phi}_B = \phi_x \vec{e}_x + \phi_z \vec{e}_z \quad , \quad \vec{\mu} = \mu_y \vec{e}_y$$

Allora, scriviamo le II ECS e proiettiamole lungo i versori $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$ e, rispettivamente, $\vec{e}_y$

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_B + \vec{R}^{(est, att)} = \vec{0} & \text{dove } \vec{R}^{(est, att)} = 4m\vec{g} - b(D-C) \\ \vec{\mu} + \vec{M}_B^{(est, att)} = \vec{0} & \vec{M}_B^{(est, att)} = (G-B)\times m\vec{g} + (D-B)\times(-b(D-C)) \end{cases}$$

Allora,

$$\vec{R}^{(est, att)}_{qe} = -4mg\vec{e}_z + b\left(R\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}R\vec{e}_2 + \frac{R}{2}\vec{e}_r\right)$$

$$= (bR - 4mg)\vec{e}_z + bR\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\theta_e \vec{e}_z + \sin\theta_e \vec{e}_x\right) + \frac{1}{2}\left(-\sin\theta_e \vec{e}_z + \cos\theta_e \vec{e}_x\right)\right)$$

$$= bR\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_e + \frac{1}{2}\cos\theta_e\right)\vec{e}_x + \left(bR - 4mg + bR\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_e - \frac{1}{2}\sin\theta_e\right)\right)\vec{e}_z$$

Quindi

$$\begin{cases} \vec{e}_x: & \phi_x = \frac{bR}{2}\left(\sqrt{3}\sin\theta_e - \cos\theta_e\right) = \frac{bR}{2}\sin\theta_e\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda\right) = \frac{bR\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\sin\theta_e \\ \vec{e}_z: & \phi_z = 4mg + \frac{bR}{2}\left(\sqrt{3}\cos\theta_e + \sin\theta_e - 2\right) = 4mg + \frac{bR}{2}\left[(3\lambda + 1)\sin\theta_e - 2\right] \end{cases}$$

Quindi,

$$\vec{\Phi}_B\big|_{q_e^{(1)}} = \frac{bR}{2}\,\frac{\sqrt{3}\,(1-\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\,\vec{e}_x + \left[4mg + \frac{bR}{2}\,\frac{(3\lambda+1)}{\sqrt{1+3\lambda^2}} - 2\right]\vec{e}_z$$

$$\vec{\Phi}_B\big|_{q_e^{(2)}} = -\frac{bR}{2}\,\frac{\sqrt{3}\,(1-\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\,\vec{e}_x + \left[4mg - \frac{bR}{2}\,\frac{(1+3\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}} - 2\right]\vec{e}_z$$

Inoltre,

$$\vec{M}_B^{(est,att)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_r - R\,\vec{e}_z\right)\times\left(-mg\,\vec{e}_z\right) + bR^2\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \vec{e}_z\right)\times\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right) =$$

$$= -\frac{mg\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_r\times\vec{e}_z +$$

$$+\, bR^2\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_\theta\times\vec{e}_z + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\theta\times\vec{e}_r} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r\times\vec{e}_z + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z\times\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{mg\sqrt{3}}{2}R\sin\theta_e\,\vec{e}_\varphi + bR^2\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta - \sqrt{3}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_r\right)$$

$$= \frac{mg\sqrt{3}}{2}R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + bR^2\left(\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \sqrt{3}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \left[mg\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta + bR^2\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right)\right]\vec{e}_\varphi$$

Dunque, nelle configurazioni di equilibrio troviamo

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_B^{(est,att)}\big|_{q_e} = -\sin\theta_e\left[mg\frac{\sqrt{3}}{2}R + bR^2\left(\sqrt{3}\,\lambda - \sqrt{3}\right)\right]\vec{e}_y\,,$$

quindi

$$\vec{\mu}\big|_{q_e^{(1)}} = -\frac{1}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\left[mg\frac{\sqrt{3}}{2}R + \sqrt{3}\,bR^2(\lambda-1)\right]\vec{e}_y$$

$$\vec{\mu}\big|_{q_e^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\left[mg\frac{\sqrt{3}}{2}R + \sqrt{3}\,bR^2(\lambda-1)\right]\vec{e}_y$$

3) Reazioni vincolari in E e D sull'asta, agli equilibri

Nelle configurazioni di equilibrio il problema è piano e dall'Hp. di vincoli lisci

$$\mathcal{S}^{(int\to asta)} = \{(D,\vec{\xi}), (E,\vec{\eta})\} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l}\vec{\xi}_D = \xi \text{ vers}(D-O) \\ \vec{\eta}_E = \eta \text{ vers}(E-O)\end{array}$$

Quindi

$$\vec{\xi}_D \overset{(2.8)}{=} \xi\left(\frac{-\vec{e}_\theta + \sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right), \quad \vec{\eta}_E \overset{(2.8)}{=} \eta\left(\frac{\vec{e}_\theta + \sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right)$$

Applichiamo la IECS sull'asta DE

$$\vec{\xi}_D + \vec{\eta}_E + \vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e} = \vec{0}$$

$$\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e^{(1)}} = m\vec{g} - b(D-C) = -mg\,\vec{e}_z + bR\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= (bR - mg)\,\vec{e}_z + \frac{bR}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{e}_r + \vec{e}_\theta\right)$$

$$\overset{(1.4)}{=} (bR-mg)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right) + \frac{bR}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{e}_r + \vec{e}_\theta\right)$$

$$= \left[(bR-mg)\cos\theta - \frac{bR\sqrt{3}}{2}\right]\vec{e}_r + \left[-(bR-mg)\sin\theta + \frac{bR}{2}\right]\vec{e}_\theta$$

$$= bR\left[\lambda\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vec{e}_r + bR\left[-\lambda\sin\theta + \frac{1}{2}\right]\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi+\eta) = -\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e}\cdot\vec{e}_r \\ \frac{1}{2}(-\xi+\eta) = -\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e}\cdot\vec{e}_\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \xi+\eta = \frac{2bR}{\sqrt{3}}\left[-\lambda\cos\theta_e + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ -\xi+\eta = 2bR\left[\lambda\sin\theta_e - \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Quindi,

$$\vec{\xi}_D = bR\left[1 - \lambda(1+\lambda)\sin\theta_e\right]\left(\frac{-\vec{e}_\theta + \sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right)$$

$$\vec{\eta}_E = \lambda bR\sin\theta_e(1-\lambda)\,\frac{\vec{e}_\theta + \sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}$$

Dunque,

$$\vec{\xi}_{D}\Big|_{qe^{(1)}} = bR\left[1 - \frac{\lambda(1+\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\right]\left(\frac{-\vec{e_0}+\sqrt{3}\,\vec{e_2}}{2}\right)$$

$$\vec{\eta}_{E}\Big|_{qe^{(1)}} = bR\,\frac{\lambda(1-\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\,\frac{\vec{e_0}+\sqrt{3}\,\vec{e_2}}{2}$$

mentre,

$$\vec{\xi}_{D}\Big|_{qe^{(2)}} = bR\left[1 + \frac{\lambda(1+\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\right]\left(\frac{-\vec{e_0}+\sqrt{3}\,\vec{e_2}}{2}\right)$$

$$\vec{\eta}_{E}\Big|_{qe^{(2)}} = -bR\,\frac{\lambda(1-\lambda)}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\,\frac{\vec{e_0}+\sqrt{3}\,\vec{e_2}}{2}$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange per il modello. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica

(8.1) $K = K^{(anello)} + K^{(asta)}$

(8.2) $K^{(anello)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{(anello)} \cdot \mathbb{I}_0^{(anello)}(\vec{\omega}^{(anello)})$

(8.3) $K^{(asta)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^{(asta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(asta)}(\vec{\omega}^{(asta)})$

(8.4) $\vec{\omega}^{(anello)} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$, $\vec{\omega}^{(asta)} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$

(8.5) $K^{(anello)} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0^{(anello)}(\dot{\varphi}\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0^{anello}(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_z^{(anello)} = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$

(8.6) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_r\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,\dot{\vec{e}}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\vec{\omega}^{(asta)} \times \vec{e}_r\right)R =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right)R \times \vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)R$$

(8.7) $|\vec{v}_G|^2 = \frac{3R^2}{4}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$

(8.8) $\mathbb{I}_G^{(asta)}(\vec{\omega}^{(asta)}) = \mathbb{I}_G^{(asta)}\left(\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right) =$

$$= -\dot{\varphi}\sin\theta\,\cancel{\mathbb{I}_G(\vec{e}_\theta)} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbb{I}_G^{(asta)}(\vec{e}_r) + \dot{\theta}\,\mathbb{I}_G^{(asta)}(\vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{1}{12}mR^2\left(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right)$$

$\frac{1}{2}\vec{\omega}^{(asta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(asta)}(\vec{\omega}^{asta}) = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right] \cdot \frac{1}{12}mR^2\left(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right)$

$$= \frac{1}{24}mR^2\left(\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right)$$

Quindi,

$$K^{(aste)} = \frac{3}{8} mR^2\left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{24} mR^2\left(\dot\varphi^2 \cos^2\theta + \dot\theta^2\right)$$

$$= \frac{1}{24} mR^2\left[\left(9\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{24} mR^2\left[\left(1 + 8\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$K = \frac{3}{4} mR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{24} mR^2\left[\left(1+8\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{24} R^2\left\{\left[m\left(19 + 8\sin^2\theta\right)\right]\dot\varphi^2 + m\,10\,\dot\theta^2\right\}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \frac{1}{12} R^2 m\left(19 + 8\sin^2\theta\right)\dot\varphi, \quad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{m}{12} R^2\left(19 + 8\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \frac{\cancel{16}\,^{4}}{\cancel{12}\,_{3}} mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi$$

$$EL_\varphi:\ \frac{m}{12} R^2\left(19 + 8\sin^2\theta\right)]\ddot\varphi + \frac{2}{3} mR^2\sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi = -c\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{6} mR^2\dot\theta, \quad \frac{\partial K}{\partial\theta} = \frac{\cancel{16}\,^{2}}{\cancel{24}\,_{3}} mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{6} mR^2\ddot\theta$$

$$EL_\theta:\ \frac{5}{6} mR^2\ddot\theta - \frac{1}{3} mR^2\sin 2\theta\,\dot\varphi^2 = \frac{bR^2}{2}\left(\sqrt{3}\lambda\sin\theta - \cos\theta\right)$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poichè la sollecitazione attiva è conservativa, le eq. linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio sono

$$(11.1) \qquad A(q_e)\,\ddot{\underline{x}} + \mathcal{H}_V(q_e)\,\underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{x}(t) = \frac{q(t) - q_e}{\varepsilon}$$

$$A(q_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot\theta \partial \dot\varphi} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi \partial \dot\theta} & \frac{\partial K}{\partial \dot\theta^2} \end{bmatrix}_{q_e^{(1)}} = \frac{mR^2}{12}\left[\begin{array}{c|c} 19 + 8\sin^2\theta_e & 0 \\ \hline 0 & 10 \end{array}\right] =$$

$$(11.2) \qquad = m\frac{R^2}{12}\left[\begin{array}{c|c} 19 + \frac{8}{1+3\lambda^2} & 0 \\ 0 & 10 \end{array}\right]$$

$$(11.3) \qquad \mathcal{H}_V(q_e) = \left[\begin{array}{c|c} c & 0 \\ \hline 0 & \frac{bR^2}{2}\sin\theta_e\left(1+3\lambda^2\right) \end{array}\right]$$

$$(11.4) \qquad m\frac{R^2}{12}\left[\begin{array}{c|c} 19 + \frac{8}{1+3\lambda^2} & 0 \\ & 10 \end{array}\right]\begin{bmatrix}\ddot x_1 \\ \ddot x_2\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} c & 0 \\ 0 & \frac{bR^2}{2}\sin\theta_e\,(1+3\lambda^2) \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, in $q_e^{(1)}$, le eq. linearizzate sono:

$$(11.5) \qquad \begin{cases} \frac{mR^2}{12}\left(19 + \frac{8}{1+3\lambda^2}\right)\ddot x_1 + c\,x_1 = 0 \\[2ex] \frac{5}{6}mR^2\,\ddot x_2 + \frac{bR^2}{2}\sqrt{1+3\lambda^2}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale delle eq. (11.5) è:

$$(12.1)\quad x_1(t) = a_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1) \qquad \nu_1 = \sqrt{\frac{12\, c}{m R^2 \left(19 + \frac{8}{1+3\lambda^2}\right)}}$$

$$(12.2)\quad x_2(t) = a_2 \cos(\nu_2 t + \alpha_2) \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{\cancel{6}^{\,3}\, b \cancel{R^2} \sqrt{1+3\lambda^2}}{\cancel{2}\; 5\, m \cancel{R^2}}}$$

Invece, in $\mathcal{C}^{(2)}$ le eq. linearizzate sono:

$$(12.3)\quad \begin{cases} \dfrac{m R^2}{12} \left(19 + \dfrac{8}{1+3\lambda^2}\right) \ddot{x}_1 + c\, x_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{5}{6}\, m R^2 \ddot{x}_2 - \dfrac{b R^2}{2} \sqrt{1+3\lambda^2}\, x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema (12.3) è:

$$(12.4)\quad x_1(t) = a_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1) \qquad \nu_1 = \sqrt{\frac{12\, c}{m R^2 \left(19 + \frac{8}{1+3\lambda^2}\right)}}$$

$$(12.5)\quad x_2(t) = a_2 \cosh(\nu_2 t + \alpha_2) \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{3\, b \sqrt{1+3\lambda^2}}{5 m}}$$

6) Il moto dell'asta DE è un moto di precessione poichè conserva l'angolo, pari a $\pi/2$ tra l'asse fisso $(O, \vec{e}_z)$ e l'asse $(O, \vec{e}_\varphi)$. Quest'ultimo è solidale all'asta poichè è sempre ortogonale all'asse $(O, \vec{e}_\theta)$, diretto come l'asta.