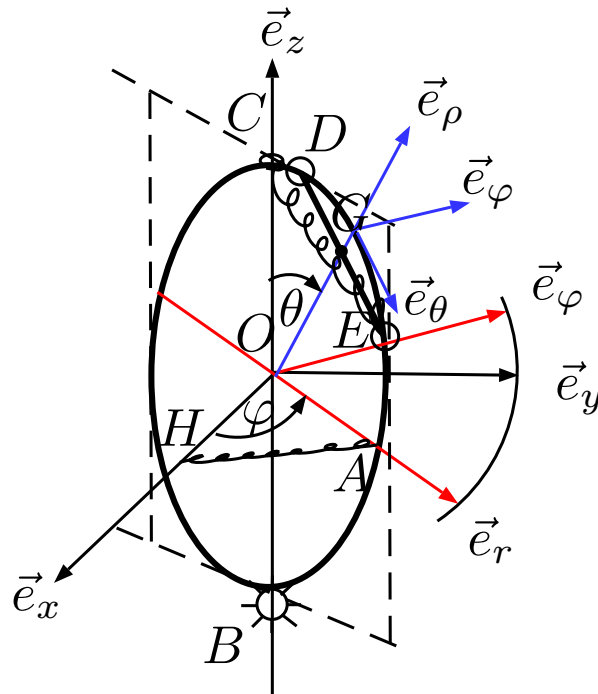


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 16 gennaio 2023

(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa M e raggio R , è vincolato ad un asse fisso verticale (O, \vec{e}_z) mediante un anellino in C e una cerniera sferica fissa in B . Un'asta omogenea di massa m e lunghezza R ha gli estremi D ed E vincolati sulla circonferenza con due cerniere sferiche scorrevoli. Una molla di costante elastica b collega l'estremo dell'asta E con il punto C dell'anello. Un'altra molla, di costante elastica c , collega A , punto medio di una delle semicirconferenze \widehat{BC} , con un punto H fissato all'asse orizzontale (O, \vec{e}_x) a distanza R da O . Tutti i vincoli sono supposti lisci e bilateri. Scelte come coordinate libere gli angoli $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ della figura, si chiede di:

STATICA

- 1) Individuare le configurazioni di equilibrio del modello, disegnarle e discuterne la stabilità.

Da ora in poi, supporre $b = \frac{3mg}{4R}$ e determinare:

- 2) le reazioni vincolari esterne sull'anello nei punti B e C nella configurazione di equilibrio stabile;
- 3) le reazioni vincolari dell'anello sull'asta nei punti D ed E nella configurazione di equilibrio stabile.

DINAMICA

- 4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alla configurazione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni;
- 6) dire se i moti linearizzati del punto 5) sono periodici o quasi-periodici.

Tema del 16/01/2022

Il modello è formato da un rigido con ore fimo, l'anello, e un altro rigido, l'asta, vincolato al primo. Con il metodo dei congelamenti meccanici si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi, può essere descritto dalle coordinate libere della figura $q = (\varphi, \theta)$ con

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Consideriamo le 3 basi:

$$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) : \text{"fimo"}$$

$$B' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) : \text{solidale all'anello}$$

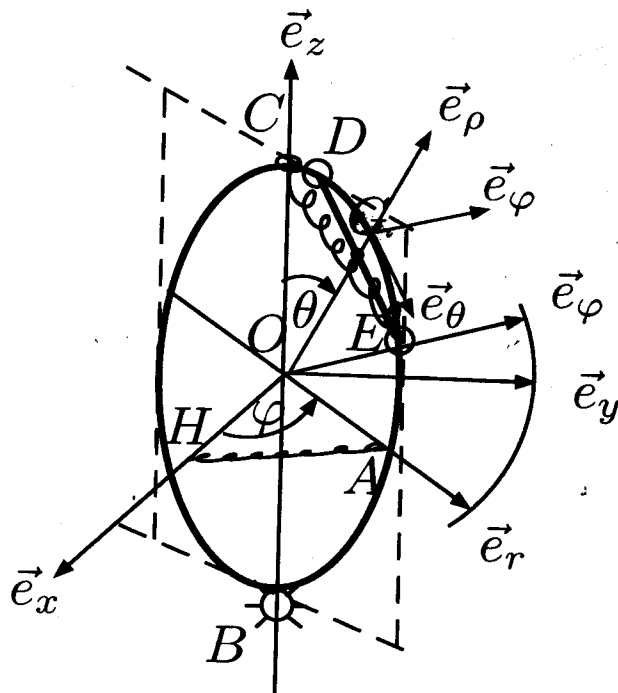
$$B'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_s) : \text{solidale all'asta}$$

$$(1.1) \begin{cases} \vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.2) \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.3) \begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_s = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

$$(1.4) \begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_s \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_\theta + \cos \theta \vec{e}_s \end{cases}$$



Quindi,

$$(2.1) \vec{x}_G = G-O = \overline{OG} \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} R (\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_x)$$

$$(2.2) G-B = (G-O) + (O-B) = \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y - R \vec{e}_z$$

$$(2.3) C-E = (C-O) + (O-E) = C-O + (O-G) + (G-E) = R \vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y - \frac{R}{2} \vec{e}_x$$

$$(2.4) A-H = (A-O) + (O-H) = R \vec{e}_z - R \vec{e}_x$$

$$(2.5) \begin{aligned} |C-E|^2 &= R \left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y - \frac{1}{2} \vec{e}_x \right) \cdot R \left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y - \frac{1}{2} \vec{e}_x \right) \\ &= R^2 \left(1 - \sqrt{3} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y - \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{4} \right) \\ &= R^2 \left(1 - \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \\ &= R^2 (2 - \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$(2.6) |A-H|^2 = R^2 (\vec{e}_z - \vec{e}_x) \cdot (\vec{e}_z - \vec{e}_x) = R^2 (1 - 2\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + 1) = R^2 (2 - 2\cos \varphi)$$

$$(2.7) D-O = (D-G) + (G-O) = \frac{R}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y$$

$$(2.8) E-O = (E-G) + (G-O) = \frac{R}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y$$

$$\text{N.B. } E-O \Big|_{\varphi=(0, \frac{4\pi}{3})} = \left[\frac{R}{2} (\cos \theta \vec{e}_z - \sin \theta \vec{e}_x) + \frac{\sqrt{3}}{2} R (\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_x) \right]_{\varphi=(0, \frac{4\pi}{3})}$$

$$= \left[\frac{R}{2} \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} R \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z - \frac{1}{2} \vec{e}_x \right) \right]_{\varphi=(0, \frac{4\pi}{3})}$$

$$= \frac{R}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \vec{e}_z \Big|_{\varphi=(0, \frac{4\pi}{3})} = -2R \vec{e}_z = -2R \vec{e}_x$$

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa poiché è costituita dal peso proprio del modello e dalla forza di richiamo delle molle che hanno, entrambe, un estremo fisso. Dunque, possiamo utilizzare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale V per trovare le configurazioni di equilibrio.

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad V(\varphi, \theta) &= -M \vec{x}_O \cdot \vec{g} - m \vec{x}_G \cdot \vec{g} + \frac{1}{2} (b \overline{CE}^2 + c \overline{AH}^2) \\
 &= -m \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y \cdot (-g \vec{e}_z) + \frac{1}{2} b R^2 (2 - \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{2} c R^2 (1 - \cos \varphi) \\
 &= m g \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \theta + \frac{1}{2} b R^2 (2 - \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) + c R^2 (1 - \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

Calcoliamo i punti stazionari della funzione V

$$(3.2) \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = c R^2 \sin \varphi = -Q_\varphi$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -m g \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} b R^2 \sin \theta + \frac{1}{2} b R^2 \cos \theta = -Q_\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} R (-m g + b R) \sin \theta + \frac{1}{2} b R^2 \cos \theta = -Q_\theta
 \end{aligned}$$

Quindi, dobbiamo risolvere il sistema

$$(3.4) \quad \begin{cases} \sin \varphi = 0 \\ b R \cos \theta = \sqrt{3} (m g - b R) \sin \theta \end{cases}$$

Poiché $\theta = 0$ NON è soluzione delle II eq., il sistema (3.4) equivale a

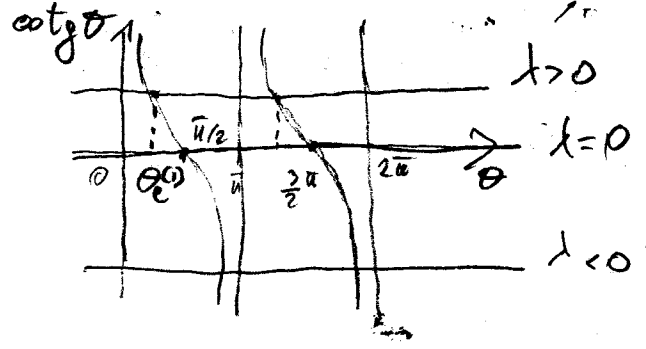
$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ vel } \varphi = \pi \\ \cotg \theta = \sqrt{3} \left(\frac{m g}{b R} - 1 \right) = \sqrt{3} \lambda \end{cases}$$

Come al solito, risolviamo la II eq. del sistema (3.5) graficamente

E' evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
 la II eq. ha 2 soluzioni date da

$$\theta_e^{(1)} = \text{arccotg}(\sqrt{3}\lambda)$$

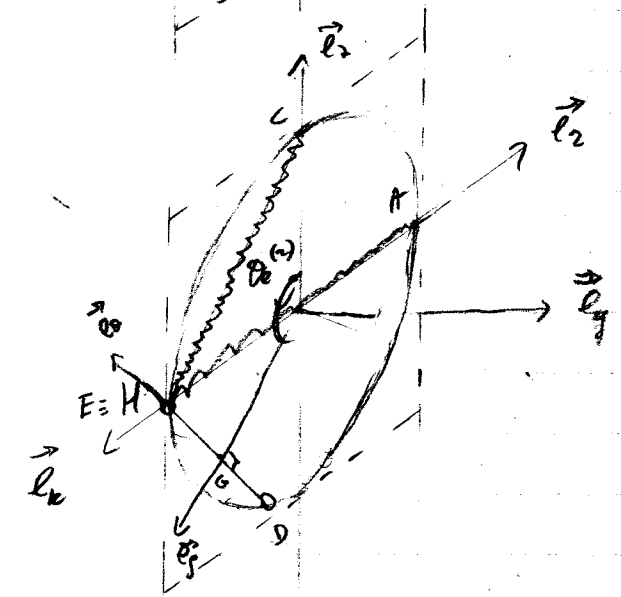
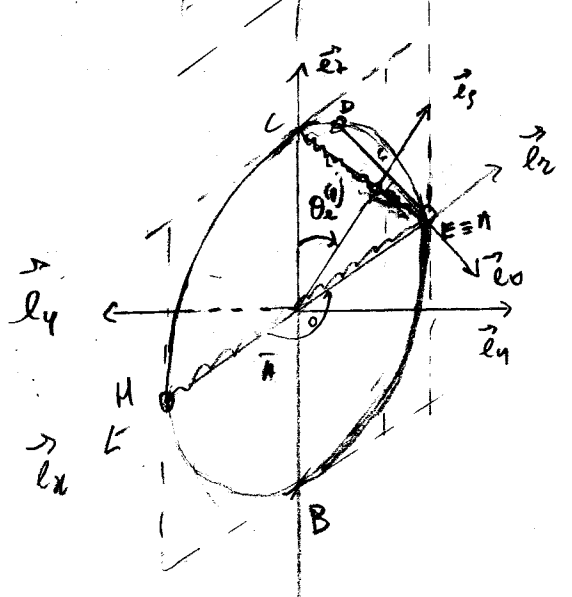
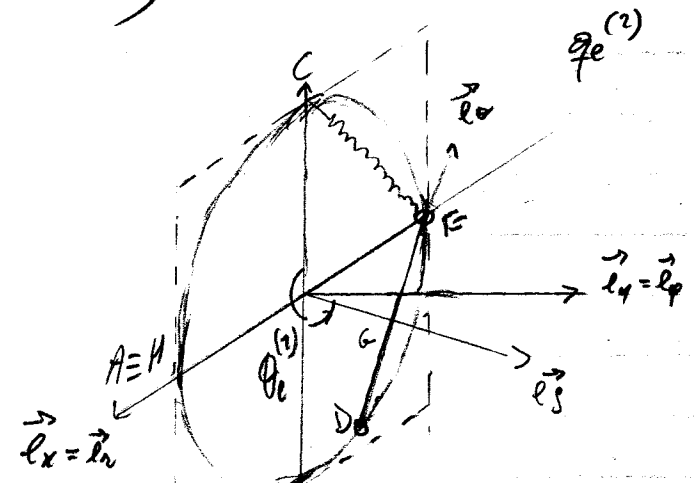
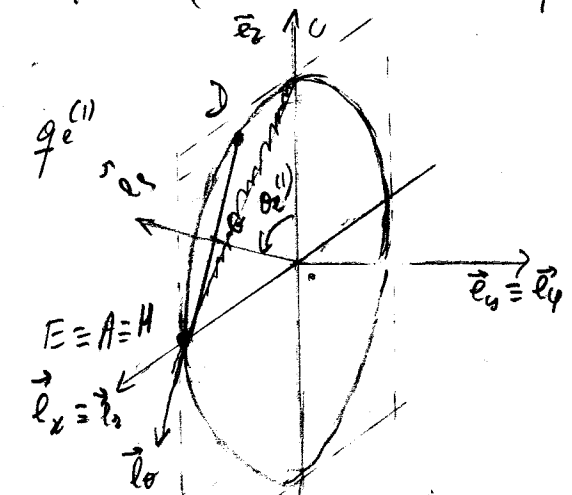
$$\theta_e^{(2)} = \theta_e^{(1)} + \bar{u}$$



Di more, il modello ammette 4 configurazioni di equilibrio

$$q_e^{(1)} = (0, \theta_e^{(1)}) , \quad q_e^{(2)} = (0, \theta_e^{(1)} + \bar{u})$$

$$q_e^{(3)} = (\bar{u}, \theta_e^{(1)}) , \quad q_e^{(4)} = (\bar{u}, \theta_e^{(1)} + \bar{u})$$



N.B. le configurazioni di equilibrio sono diseguate per $b = \frac{3}{4} \frac{mg}{CR}$

Per studiare la stabilità applichiamo i Teo. di Dirichlet-Lagrange e di . Quindi, calcoliamo la matrice Hessiana di V nelle configurazioni di equilibrio.

$$(5.1) \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = cR^2 \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R(-ug + bR) \cos \theta - \frac{1}{2} bR^2 \sin \theta$$

$$= -\frac{bR^2}{2} (\sqrt{3} \lambda \cos \theta + \sin \theta)$$

Quindi,

$$(5.2) \mathcal{H}_{V|q_e} = \begin{bmatrix} cR^2 \cos \varphi_e & 0 \\ 0 & -\frac{bR^2}{2} \sin \theta_e (3\lambda^2 + 1) \end{bmatrix}$$

Dunque

$$(5.3) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(1)}} = cR^2 > 0, \quad \det \mathcal{H}|_{q_e^{(1)}} = -cR^2 \frac{bR^2}{2} \sin \theta_e (3\lambda^2 + 1) < 0$$

$\Rightarrow q_e^{(1)}$ è un punto di max \Rightarrow instabile

$$(5.4) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(2)}} = cR^2 > 0, \quad \det \mathcal{H}|_{q_e^{(2)}} = -\frac{bcR^4}{2} \sin \theta_e (3\lambda^2 + 1) > 0$$

$\Rightarrow q_e^{(2)}$ è un punto di min. per $V \Rightarrow$ stabile

$$(5.5) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(3)}} = -cR^2 < 0 \Rightarrow q_e^{(3)}$$
 è un punto di sella \Rightarrow instabile

$$(5.6) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(4)}} = -cR^2 < 0 \Rightarrow q_e^{(4)}$$
 è un punto di sella \Rightarrow instabile

In particolare, se $b = 3 \frac{ug}{hR}$, risulta che

$$(5.7) \theta_e = \arccos \operatorname{tg} \left(\sqrt{3} \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \right) = \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

quindi

$$(5.8) q_e^{(2)} = \left(0, \frac{4}{3} \pi \right)$$

2) Reazioni vincolari in B e C nell'anello, in $q_e^{(2)} = (0, \frac{4\sqrt{3}}{3})$

Dall'ipotesi di vincoli lisci, segue che

$$\mathcal{L}^{(ext, rest)} = \{ (B, \vec{\Phi}), (C, \vec{\Psi}) \} \text{ con } \vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Comunque, in tutte le configurazioni di equilibrio, poiché $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$, il problema si riduce ad uno piano, cioè

$$\vec{\Phi}_B = \phi_x \vec{e}_x + \phi_z \vec{e}_z, \quad \vec{\Psi}_C = \psi_x \vec{e}_x$$

Allora, scriviamo le II ECS e proiettiamole lungo i versori \vec{e}_x, \vec{e}_z .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Phi}_B + \vec{\Phi}_C + \vec{R}^{(ext, ext)} = \vec{0} \\ (C-B) \times \vec{\Phi}_C + \vec{M}_B^{(ext, ext)} = \vec{0} \end{array} \right. \text{ dove } \begin{array}{l} \vec{R} \Big|_{q_e^{(2)}} = (M+m)\vec{g} - c(A-H) \\ \vec{M}_B \Big|_{q_e^{(2)}} = (C-B) \times m\vec{g} + (A-B) \times c(A-H) \\ (C-B) \times \vec{\Phi}_C = 2R \vec{e}_z \times \psi_x \vec{e}_x = 2R\psi_x \vec{e}_y \end{array}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \vec{R} \Big|_{q_e^{(2)}} &= -(M+m)g \vec{e}_z \\ \vec{M}_B \Big|_{q_e^{(2)}} &= [(C-0) + (0-B)] \times (-mg \vec{e}_z) = \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_y \times (-mg \vec{e}_z) \\ &= -mg \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \sin\theta_c mgR \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \Big|_{q_e^{(2)}} = -\frac{3}{4} mgR \vec{e}_y \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{array}{l} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \phi_x + \psi_x = 0 \\ \phi_z - (M+m)g = 0 \\ 2R\psi_x - \frac{3}{4} mgR = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi_x = -\frac{3}{8} mg \\ \phi_z = (M+m)g \\ \psi_x = \frac{3}{8} mg \end{array} \right.$$

3) Reazioni vincolari in E e D sull'asta, in $q_e^{(2)} = (0, \frac{4}{3} \bar{u})$

Nelle configurazioni di equilibrio il problema è piano e dell'Hp. di vincoli

lisci $f(\text{int} \rightarrow \text{ext}) = \left\{ \left(\vec{0}, \frac{\vec{\zeta}}{3} \right), (E, \vec{\eta}) \right\}$ con $\vec{\zeta}_D = \zeta \text{ verso } (D-O)$
 $\vec{\eta}_E = \eta \text{ verso } (E-O)$

Quindi

$$\vec{\zeta}_D^{(2)} = \frac{\zeta}{3} \left(-\frac{\vec{l}_0}{2} + \sqrt{3} \frac{\vec{l}_f}{2} \right), \quad \vec{\eta}_E^{(2)} = \eta \left(\frac{\vec{l}_0 + \sqrt{3} \vec{l}_f}{2} \right)$$

Applichiamo la IECS sull'asta DE

$$\vec{\zeta}_D + \vec{\eta}_E + \vec{R}_{|q_e^{(2)}}^{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})} = \vec{0}$$

$$\vec{R}_{|q_e^{(2)}}^{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})} = m \vec{g} - b(E-C) = -mg \vec{l}_2 + b \left(\vec{l}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{l}_f \Big|_{q_e^{(2)}} - \frac{1}{2} \vec{l}_0 \Big|_{q_e^{(2)}} \right)$$

$$= (bR - mg) \vec{l}_2 - \frac{bR}{2} (\sqrt{3} \vec{l}_f + \vec{l}_0) \Big|_{q_e^{(2)}}$$

$$\stackrel{(1.4)}{=} (bR - mg) \left(-\sin \theta_e \vec{l}_0 + \cos \theta_e \vec{l}_f \right) \Big|_{q_e^{(2)}} - \frac{bR}{2} \left(\sqrt{3} \vec{l}_f + \vec{l}_0 \right) \Big|_{q_e^{(2)}}$$

$$= \left[(bR - mg) \cos \theta_e - \frac{bR \sqrt{3}}{2} \right] \vec{l}_f + \left[-(bR - mg) \sin \theta_e - \frac{bR}{2} \right] \vec{l}_0$$

$$= \frac{mg}{8} \left[(1 - 3\sqrt{3}) \vec{l}_f + (\sqrt{3} + 3) \vec{l}_0 \right]$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} (\zeta + \eta) = - \vec{R}_{|q_e^{(2)}}^{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})} \cdot \vec{l}_f \\ \frac{1}{2} (-\zeta + \eta) = - \vec{R}_{|q_e^{(2)}}^{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})} \cdot \vec{l}_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{mg}{12} (\sqrt{3} + 9)$$

$$\zeta = -\frac{mg \sqrt{3}}{6}$$

Quindi,

$$\vec{\zeta}_D = -\frac{mg \sqrt{3}}{6} \left(-\frac{\vec{l}_0}{2} + \sqrt{3} \frac{\vec{l}_f}{2} \right) \Big|_{q_e^{(2)}}$$

$$\vec{\eta}_D = \frac{mg}{12} (\sqrt{3} + 9) \left(\frac{\vec{l}_0 + \sqrt{3} \vec{l}_f}{2} \right) \Big|_{q_e^{(2)}} = -\frac{mg}{12} (\sqrt{3} + 9) \vec{l}_2 = -\frac{mg}{12} (\sqrt{3} + 9) \vec{l}_x$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange per il modello. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica

$$K = K^{(anillo)} + K^{(asta)}$$

$$K^{(anillo)} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(anillo)} \cdot \mathbb{I}_0^{(anillo)} \vec{\omega}^{(anillo)}$$

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(asta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(asta)} \vec{\omega}^{(asta)}$$

$$\vec{\omega}^{(anillo)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\omega}^{(asta)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{e}_\varphi)$$

$$K^{(anillo)} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0^{(anillo)} (\dot{\varphi} \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0^{(anillo)} (\vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_z = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \frac{d}{dt} (G-O) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_\rho \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R \dot{\vec{e}}_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} (\vec{\omega}^{(asta)} \times \vec{e}_\rho) R = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) R \times \vec{e}_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} (\dot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\rho) R \end{aligned}$$

$$|\vec{v}_G|^2 = \frac{3R^2}{4} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_G^{(asta)} (\vec{\omega}^{(asta)}) &= \mathbb{I}_G^{(asta)} (\dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{e}_\varphi) + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) = \\ &= -\dot{\varphi} \sin\theta \mathbb{I}_G^{(asta)} (\vec{e}_\rho) + \dot{\varphi} \cos\theta \mathbb{I}_G^{(asta)} (\vec{e}_\varphi) + \dot{\theta} \mathbb{I}_G^{(asta)} (\vec{e}_\varphi) = \\ &= \frac{1}{12} m R^2 (\dot{\varphi} \cos\theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(asta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(asta)} (\vec{\omega}^{(asta)}) &= \frac{1}{2} [\dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{e}_\varphi) + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi] \cdot \frac{1}{12} m R^2 (\dot{\varphi} \cos\theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) = \\ &= \frac{1}{24} m R^2 (\cos^2\theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}K^{(c.m.)} &= \frac{3}{8} m \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{24} m R^2 (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) \\&= \frac{1}{24} m R^2 \left[(9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right] \\&= \frac{1}{24} m R^2 \left[(1 + 8 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m R^2 \left[(1 + 8 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right] \\&= \frac{1}{24} R^2 \left\{ [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \dot{\varphi}^2 + m 10 \dot{\theta}^2 \right\}\end{aligned}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \ddot{\varphi} + \frac{16}{12} m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$EL_{\varphi}: \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \ddot{\varphi} + \frac{2}{3} m R^2 \sin 2\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = -c R^2 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{5}{6} m R^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{16}{24} m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{5}{6} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$EL_{\theta}: \frac{5}{6} m R^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{3} m R^2 \sin 2\theta \dot{\varphi}^2 = \frac{m g R}{8} (\sqrt{3} \sin \theta - 3 \cos \theta)$$

5) linearizzazione delle EL intorno a $q_e^{(2)} = (0, \frac{4}{3}\bar{u})$

Poiché le sollecitazioni attive è conservativa, le eq. linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio sono

$$A(q_e) \ddot{x} + H_v(q_e) x = 0 \quad x(t) = \frac{q(t) - q_e}{\Sigma}$$

$$A(q_e^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi} \partial \theta} & \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}^2} \end{bmatrix} \Big|_{q_e^{(2)}} = \frac{R^2}{12} \begin{bmatrix} 6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta_e^{(2)}) & 0 \\ 0 & 10m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R^2}{12} \begin{bmatrix} 6M + 7m & 0 \\ 0 & 10m \end{bmatrix}$$

$$H_v(q_e^{(2)}) = \begin{bmatrix} cR^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} mgR \end{bmatrix}$$

$$\frac{R^2}{12} \begin{bmatrix} 6M + 7m & 0 \\ 0 & 10m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cR^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} mgR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{R^2}{12} (6M + 7m) \ddot{x}_1 + cR^2 x_1 = 0 & \nu_1 = \sqrt{\frac{cR^2 \cdot 12}{R^2 (6M + 7m)}} \\ \frac{5}{6} mR^2 \ddot{x}_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} mgR x_2 = 0 & \nu_2 = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} mgR \cdot 6}{\frac{5}{2} mR^2}} \end{cases}$$

6) I moti sono periodici se $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{12c}{6M+7m} \frac{10R}{3\sqrt{3}g}} \in \mathbb{Q}$, altrimenti quasi-periodici