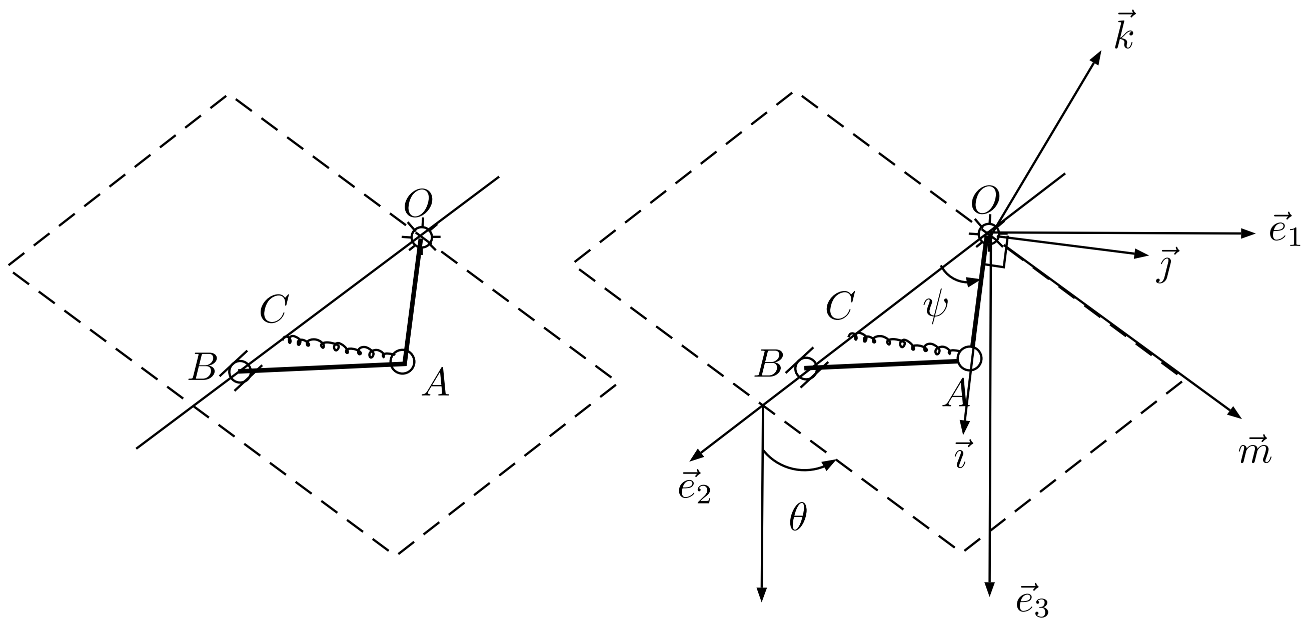
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 19 settembre 2022

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato biella-manovella della figura, costituito da due aste di uguale lunghezza L e massa m, vincolate tra loro da una cerniera cilindrica in A e vincolate al'asse fissso *orizzontale* $(O, \vec{e}_2)$ con una cerniera sferica fissa in O e un appoggio liscio in B. Il modello è soggetto al peso proprio e all'azione di una molla di costante elastica c, fissata in A e nel punto fisso C dell'asse $(O, \vec{e}_2)$, a distanza d da O.

STATICA.

1) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione delle coordinate $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 < \psi < \pi$. Poi, disegnarle e discutere la loro stabilità.

2) determinare le reazioni vincolari esterne sul modello nel punto O, in tutte le configurazioni di equilibrio.

3) determinare le reazioni vincolari esterne sul modello nel punto B, in tutte le configurazioni di equilibrio.

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) dire se esiste un integrale primo di moto e giustificare la risposta. In caso positivo, scriverlo esplicitamente.

Tema del 19/9/2022

Il modello è un articolato biella-manovella che può ruotare intorno all'asse al quale è vincolato. Quindi, dal metodo dei congelamenti successivi, segue che possiede 2 gradi di libertà.

Consideriamo le 4 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: base fissa

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_2, \vec{m}, \vec{k})$: "base intermedia"

$\mathcal{B}'' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base solidale alla manovella

$\mathcal{B}''' = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$: base solidale alla biella

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 = \sin\theta\, \vec{m} + \cos\theta\, \vec{k}$$
$$\vec{m} = \cos\theta\, \vec{e}_3 + \sin\theta\, \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_2 = \vec{e}_2$$
$$\vec{k} = -\sin\theta\, \vec{e}_3 + \cos\theta\, \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 = \cos\theta\, \vec{m} - \sin\theta\, \vec{e}_3$$

$$\vec{i} = \cos\varphi\, \vec{e}_2 + \sin\varphi\, \vec{m} \qquad \vec{e}_2 = \cos\varphi\, \vec{i} - \sin\varphi\, \vec{j}$$
$$\vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{e}_2 + \cos\varphi\, \vec{m} \qquad \vec{m} = \sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}$$
$$\vec{k} = \vec{k} \qquad \vec{k} = \vec{k}$$

$$\vec{u} = \cos\psi\, \vec{e}_2 - \sin\psi\, \vec{m} \qquad \vec{e}_2 = \cos\psi\, \vec{u} + \sin\psi\, \vec{w}$$
$$\vec{w} = \sin\psi\, \vec{e}_2 + \cos\psi\, \vec{m} \qquad \vec{m} = -\sin\psi\, \vec{u} + \cos\psi\, \vec{w}$$
$$\vec{k} = \vec{k}$$

$$\vec{i} = \cos\varphi\, \vec{e}_2 + \sin\varphi\,(\cos\theta\, \vec{e}_3 + \sin\theta\, \vec{e}_1)$$
$$\vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{e}_2 + \cos\varphi\,(\cos\theta\, \vec{e}_3 + \sin\theta\, \vec{e}_1)$$
$$\vec{k} = -\sin\theta\, \vec{e}_3 + \cos\theta\, \vec{e}_1$$

Vettori notevoli

$A-O = L\,\vec{i}$

$G_1-O = \frac{L}{2}\,\vec{i}$

$C-O = d\,\vec{e}_2$

$B-O = 2L\cos\psi\,\vec{e}_2$

$B-A = (B-O)+(O-A) = 2L\cos\psi\,\vec{e}_2 - L\vec{i} = L(-\sin\theta\sin\psi\,\vec{e}_1 + \cos\psi\,\vec{e}_2 - \cos\theta\sin\psi\,\vec{e}_3)$

$G_2-O = (G_2-A)+(A-O) = \frac{1}{2}(B-A)+(A-O) = L(\cos\psi\,\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{i})$

$A-C = (A-O)+(O-C) = L\vec{i} - d\,e_2$

$G_2-A = \frac{1}{2}(B-A) = L(\cos\psi\,\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{i})$

Velocità angolare della manovella

$\vec{\omega}^{(m)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_2 + \dot{\psi}\,\vec{K}$ Teo di Frisi

Velocità angolare della biella: $\vec{\omega}^{(b)}$

$\vec{\omega}^{(b)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_2 - \dot{\psi}\,\vec{K}$ Teo di Frisi

Statica

1) Poichè le sollecitazioni del peso proprio e della molla con estremo C fisso sono conservative, possiamo usare l'energia potenziale $V(\theta, \psi)$

$$V(\theta,\psi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2} + \frac{1}{2}c\,\overline{AC}^2$$

$$= -mg\vec{e}_3\cdot\frac{L}{2}\vec{i} - mg\vec{e}_3\frac{L}{2}\left(3\cos\psi\,\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\sin\psi\,\vec{m}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}c\,|A-C|^2$$

$$= -mg\frac{L}{2}\cos\theta\sin\psi - \frac{mgL}{2}\cos\theta\sin\psi + \frac{1}{2}c\left(\cancel{L^2}+\cancel{d^2}-2Ld\,\vec{i}\cdot\vec{e}_2\right)$$

$$= -mgL\cos\theta\sin\psi - dLc\cos\psi$$

Quindi

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = +mgL\sin\theta\sin\psi = -Q_\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\psi} = -mgL\cos\theta\cos\psi + dLc\sin\psi = -Q_\psi$$

$$\begin{cases} \sin\theta\sin\psi = 0 \\ -mg\cos\theta\cos\psi + dc\sin\psi = 0 \end{cases}$$

Eq. pure di equilibrio

La I eq. ha soluzioni $\{\theta=0, \theta=\pi\} \cup \{\psi=0, \psi=\pi\}$. Viste le restrizioni imposte sulla coordinata ψ, teniamo solo

$$\theta_e^{(1)}=0\,,\quad \theta_e^{(2)}=\pi$$

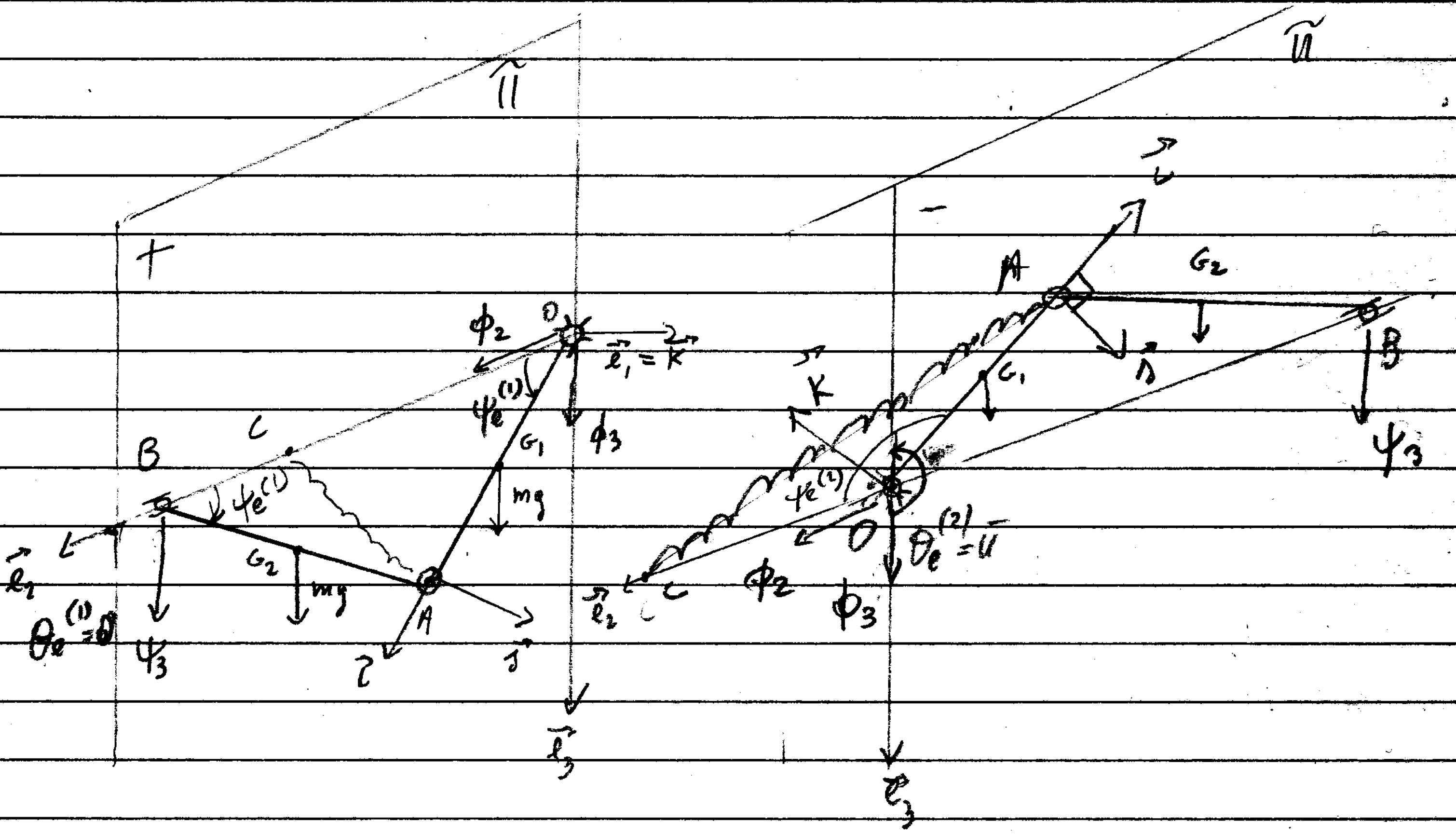
Sostituendo nella seconda, troviamo φ_e

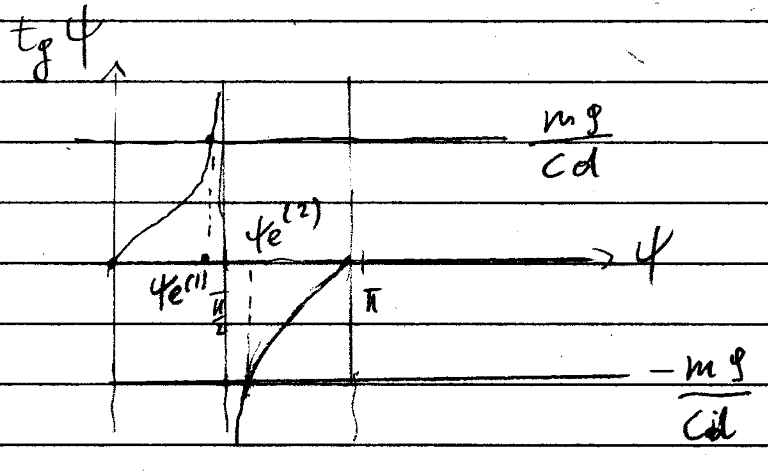
$$tg\,\varphi_e^{(1)} = \frac{mg}{de} = \lambda \,, \quad tg\,\varphi_e^{(2)} = -\frac{mg}{de} = -\lambda$$

$$\cos\varphi_e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \,, \sin\varphi_e^{(1)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \,, \quad \cos\varphi_e^{(2)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \,, \sin\varphi_e^{(2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Dunque, troviamo 2 soluzioni di equilibrio $\underline{q_e} = (\theta_e, \varphi_e)$

$$\underline{q_e}^{(1)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\frac{mg}{de}\right) , \quad q_e^{(2)} = \left(\pi,\ \pi - \varphi_e^{(1)}\right)$$





Stabilità degli equilibri

Calcoliamo la matrice Hessiana di V e valutiamola negli equilibri.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgL \cos\theta \sin\varphi \ , \ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} = mgL \sin\theta \cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = mgL \sin\theta \cos\varphi \ , \ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = mgL \cos\theta \sin\varphi + cdL \cos\varphi$$

Dunque

$$\mathcal{H}_{V|q_e^{(1)}} = \begin{bmatrix} mgL \underbrace{\cos\theta_e^{(1)}}_{1} \sin\varphi_e^{(1)} & mgL \cancel{\sin\theta_e^{(1)}} \cos\varphi_e^{(1)} \\ mgL \cancel{\sin\theta_e^{(1)}} \cos\varphi_e^{(1)} & mgL \underbrace{\cos\theta_e^{(1)}}_{1} \sin\varphi_e^{(1)} + cdL \cos\varphi_e^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11|q_e^{(1)}} = mgL \sin\varphi_e^{(1)} > 0 \ , \ \det \mathcal{H}_{V|q_e^{(1)}} = mgcdL^2 \sin\varphi_e^{(1)} \cos\varphi_e^{(1)} + \left(mgL \sin\varphi_e^{(1)}\right)^2 > 0$$

Quindi, $q_e^{(1)}$ è stabile.

$$\mathcal{H}_{V|q_e^{(2)}} = \begin{bmatrix} mgL \underbrace{\cos\theta_e^{(2)}}_{-1} \sin\varphi_e^{(2)} & mgL \cancel{\sin\theta_e^{(2)}} \cos\varphi_e^{(2)} \\ mgL \cancel{\sin\theta_e^{(2)}} \cos\varphi_e^{(2)} & mgL \underbrace{\cos\theta_e^{(2)}}_{-1} \sin\varphi_e^{(2)} + cdL \cos\varphi_e^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11|q_e^{(2)}} = -mgL \sin\varphi_e^{(2)} < 0 \ , \ \det \mathcal{H}_{V|q_e^{(2)}} = mgL^2 \sin\varphi_e^{(2)} \left(mg \sin\varphi_e^{(2)} + - cd \cos\varphi_e^{(2)}\right) = mgL^2 \sin\varphi_e^{(2)} \cos\varphi_e^{(2)} \left(mg \operatorname{tg}\varphi_e^{(2)} - cd\right) \geq 0$$

Dunque, $q_e^{(2)}$ è instabile.

2) e 3) Reazioni vincolari in O e B nelle configurazioni di equilibrio $q_e^{(1)}$ e $q_e^{(2)}$.

L'insieme delle reazioni vincolari in O e B sarà

$$(5.1)\quad \mathcal{L}^{rea} = \left\{ \left(O, \vec{\phi}\right), \left(B, \vec{\Psi}\right) \right\} \text{ con } \vec{\Psi}\cdot\vec{e}_2 = 0$$

Quindi, a priori abbiamo 5 incognite $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \Psi_1, \Psi_3)$. Comunque, poiché nelle configurazioni di equilibrio tutte le forze attive stanno nel piano verticale, anche le reazioni staranno nel piano verticale. Dunque, le incognite si riducono a 3 (ϕ_2, ϕ_3, Ψ_3).

Consideriamo $q_e^{(1)} = \left(0, \arctg \dfrac{mg}{Cd}\right)$

$$(5.2)\begin{cases} \vec{R}^{(est, att \to b+m)} + \vec{\phi}_O + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est, att \to b)} + (B-A)\times \vec{\Psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(est, att \to b+m)} &= 2m\vec{g} - c(A-C) \\ &= 2mg\,\vec{e}_3 - c\left(L\,\vec{i}\big|_{q_e^{(1)}} - d\,\vec{e}_2\right)\end{aligned}$$

Poiché
$$\begin{aligned}\vec{i}\big|_{q_e^{(1)}} &= \cos\varphi_e^{(1)}\vec{e}_2 + \sin\varphi_e^{(1)}\cos\theta_e^{(1)}\vec{e}_3 + \cancel{\sin\varphi_e^{(1)}\sin\theta_e^{(1)}\vec{e}_1} \\ &= \cos\varphi_e^{(1)}\vec{e}_2 + \sin\varphi_e^{(1)}\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\vec{R}^{(est, att \to b+m)}\big|_{q_e^{(1)}} = -c\left(L\cos\varphi_e^{(1)} - d\right)\vec{e}_2 + \left(2mg - cL\sin\varphi_e^{(1)}\right)\vec{e}_3$$

$$\vec{M}_A^{(ext, a \to b)} = (G_2 - A) \times m\vec{g} = \frac{L}{2} \cos\varphi_e^{(1)} mg\,\vec{e}_1$$

$$(B - A) \times \psi_3 \vec{e}_3 = L \cos\varphi_e^{(1)} \psi_3$$

Quindi il sistema (5.2) si può scrivere

$$\begin{cases} \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3 + \psi_3 \vec{e}_3 = c\left(L\cos\varphi_e^{(1)} - d\right)\vec{e}_2 - \left(2mg - cL\sin\varphi_e^{(1)}\right)\vec{e}_3 \\ \cancel{L}\,\cancel{\cos\varphi_e^{(1)}}\,\psi_3 \vec{e}_1 = -\frac{\cancel{L}}{2}\cancel{\cos\varphi_e^{(1)}}\, mg\,\vec{e}_1 \end{cases}$$

Dalla II eq. otteniamo

$$\psi_3 = -\frac{mg}{2}$$

Dalla I eq. troviamo

$$\phi_2 = c\left(L\cos\varphi_e^{(1)} - d\right) = c\left(L\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right)$$

$$\phi_3 = -\psi_3 - \left(2mg - cL\sin\varphi_e^{(1)}\right) = -\left(3\frac{mg}{2} - cL\sin\varphi_e^{(1)}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}mg + cL\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Consideriamo $q_e^{(2)} = \left(\overline{\pi}, \overline{\pi} - \operatorname{arctg} \frac{mg}{cd}\right)$.

Poiché $\vec{v}_{|q_e^{(2)}} = \cos\varphi_e^{(2)}\vec{e}_2 + \sin\varphi_e^{(2)}\cos\theta_e^{(2)}\vec{e}_3 + \sin\varphi_e^{(2)}\cancel{\sin\theta_e^{(2)}}\vec{e}_1$
$= \cos\varphi_e^{(2)}\vec{e}_2 - \sin\varphi_e^{(2)}\vec{e}_3$

$$\vec{R}^{(est, att \to b+m)}_{|q_e^{(2)}} = 2mg\vec{e}_3 - c\left(L\cos\varphi_e^{(2)}\vec{e}_2 - L\sin\varphi_e^{(2)}\vec{e}_3 - d\vec{e}_2\right)$$

$$= -c\left(L\cos\varphi_e^{(2)} - d\right)\vec{e}_2 + \left(2mg + cL\sin\varphi_e^{(2)}\right)\vec{e}_3$$

$$\vec{M}_A^{(est, att \to b)} = (G_2 - A)\times m\vec{g} = \frac{L}{2}\cos\varphi_e^{(2)} mg\,\vec{e}_1$$

$$(B-A)\times \psi_3\vec{e}_3 = L\cos\varphi_e^{(2)}\psi_3$$

Quindi il sistema (5.2) si può scrivere

$$\begin{cases} \phi_2\vec{e}_2 + \phi_3\vec{e}_3 + \psi_3\vec{e}_3 = c\left(L\cos\varphi_e^{(2)} - d\right)\vec{e}_2 - \left(2mg + cL\sin\varphi_e^{(2)}\right)\vec{e}_3 \\ \cancel{L}\cos\varphi_e^{(2)}\psi_3\,\vec{e}_1 = \frac{\cancel{L}}{2}\cos\varphi_e^{(2)} mg\,\vec{e}_1 \end{cases}$$

Dalla $\overline{II}$ eq. otteniamo

$$\psi_3 = -\frac{mg}{2}$$

Dalla I eq. troviamo

$$\phi_2 = c\left(L\cos\varphi_e^{(2)} - d\right) = c\left(\frac{-L}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right)$$

$$\phi_3 = -\psi_3 - \left(2mg + cL\sin\varphi_e^{(2)}\right) = -\frac{3}{2}mg - \frac{cL\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Dinamica

4) Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(m)} + K^{(b)}$$

$$K^{(m)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{(m)} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}^{(m)})$$ poiché $O \in$ manovella è fisso

Scriviamo la matrice d'inerzia $[\mathbb{I}_O]$ rispetto alla base solidale $\mathcal{B}'' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una TPI(O)

$$[\mathbb{I}_O]^{\mathcal{B}''} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbb{I}_O(\vec{i}) & \mathbb{I}_O(\vec{j}) & \mathbb{I}_O(\vec{k}) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mL^2 \end{array}\right] \end{array}$$

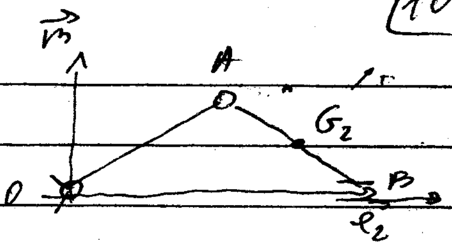
$$\vec{\omega}^{(m)} = \dot{\theta}\vec{e}_2 + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}) + \dot{\varphi}\vec{k}$$

Quindi

$$K^{(m)} = \frac{1}{2}[\dot{\theta}\cos\varphi, -\dot{\theta}\sin\varphi, \dot{\varphi}]\frac{1}{3}mL^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{\theta}\cos\varphi, -\dot{\theta}\sin\varphi, \dot{\varphi}]\frac{1}{3}mL^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}mL^2(\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2)$$

$$K^{(b)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{G_2}|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(b)} \cdot I_{G_2}(\vec{\omega}^{(b)})$$



$$\vec{v}_{G_2}^{(abs)} = \vec{v}_{G_2}^{(rel)} + \vec{v}_{G_2}^{(tr)}$$

$\vec{v}_{G_2}^{(rel)}$ é relativa a $B' = (\vec{e}_2, \vec{m}, \vec{K})$

$$G_2 - O = \frac{L}{2}\left(3\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{m}\right)$$

$$\vec{v}_{G_2}^{(rel)} = \frac{L}{2}\left(-3\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\varphi\,\vec{m}\right)\dot{\varphi}$$

$$\vec{v}_{G_2}^{(tr)} = \vec{\omega}^{(B')} \times (G_2 - O) = \dot{\theta}\,\vec{e}_2 \times \frac{L}{2}\left(3\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{m}\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_2 \times \vec{m} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{K}$$

Donde que,

$$\vec{v}_{G_2} = \frac{L}{2}\left[\left(-3\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\varphi\,\vec{m}\right)\dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{K}\right]$$

$$|\vec{v}_{G_2}|^2 = \frac{L^2}{4}\left[\left(9\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi\right]$$

$$= \frac{L^2}{4}\left[\left(1 + 8\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2\right]$$

Calcolo del termine polare $\frac{1}{2}\vec{\omega}^{(b)} \cdot \mathbb{I}_{G_2}(\vec{\omega}^{(b)})$

$$\vec{\omega}^{(b)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_2 - \dot{\varphi}\,\vec{k} = -\dot{\varphi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\left(\cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w}\right)$$

La matrice d'inerzia della biella rispetto a G_2 sulla base solidale $\mathcal{B}''' = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ è data da

$$\left[\mathbb{I}_{G_2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{12} m L^2 & \\ & & \frac{1}{12} m L^2 \end{bmatrix}$$

Dunque, il termine polare è

$$\frac{1}{2}\left[\dot{\theta}\cos\varphi, \dot{\theta}\sin\varphi, -\dot{\varphi}\right] \frac{1}{12} m L^2 \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24} m L^2 \left[\dot{\theta}\cos\varphi, \dot{\theta}\sin\varphi, -\dot{\varphi}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24} m L^2 \left(\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$$

Dunque,

$$K^{(b)} = \frac{1}{2}\frac{m L^2}{4}\left[\left(1 + 8\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{24} m L^2 \left(\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$$

$$= m L^2 \left[\left(\frac{1}{6} + \sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2\right]$$

Quindi

$$K = \frac{1}{6} mL^2\left(\sin^2\psi\,\dot\theta^2 + \dot\psi^2\right) + \frac{1}{6} mL^2\left[\left(1+6\sin^2\psi\right)\dot\psi^2 + \sin^2\psi\,\dot\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{6} mL^2\left(2\sin^2\psi\,\dot\theta^2 + 2\dot\psi^2 + 6\sin^2\psi\,\dot\psi^2\right)$$

$$= \frac{1}{3} mL^2\left[\sin^2\psi\,\dot\theta^2 + \left(1+3\sin^2\psi\right)\dot\psi^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} mL^2\,[\dot\theta, \dot\psi]\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sin^2\psi & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\left(1+3\sin^2\psi\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta \\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

EL_θ: $\dfrac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \dfrac{2}{3} mL^2\sin^2\psi\,\dot\theta$, $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \dfrac{2}{3} mL^2\left(\sin 2\psi\,\dot\psi\dot\theta + \sin^2\psi\,\ddot\theta\right)$, $\quad \dfrac{\partial K}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{2}{3} mL^2\left(\sin^2\psi\,\ddot\theta + \sin 2\psi\,\dot\theta\dot\psi\right) = -mgL\sin\theta\sin\psi$$

EL_ψ: $\dfrac{\partial K}{\partial\dot\psi} = \dfrac{2}{3} mL^2\left(1+3\sin^2\psi\right)\dot\psi$, $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial K}{\partial\dot\psi} = \dfrac{2}{3} mL^2\left(3\sin 2\psi\,\dot\psi^2 + \left(1+3\sin^2\psi\right)\ddot\psi\right)$

$$\frac{\partial K}{\partial\psi} = mL^2\left(\frac{1}{3}\sin 2\psi\,\dot\theta^2 + \sin 2\psi\,\dot\psi^2\right)$$

$$mL^2\left[\left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\psi\right)\ddot\psi + \sin 2\psi\left(-\frac{1}{3}\dot\theta^2 + \dot\psi^2\right)\right] = mgL\cos\theta\cos\psi - cdL\sin\psi$$

5) Linearizzazione delle EL

Poiché la sollecitazione esterna è conservativa, possiamo scrivere le EL linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio q_e nel modo seguente:

$$A\underline{x} + V\underline{x} = 0 \qquad \text{dove} \quad \underline{x} = \frac{q - q_e}{\varepsilon}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\Big|_{q_e}, \qquad V = \mathcal{H}_V\big|_{q_e}$$

Allora

$$A = \frac{2}{3} m l^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_e & 0 \\ 0 & 1 + 3\sin^2\varphi_e \end{bmatrix} = \frac{2}{3} m l^2 \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} & \\ & 1 + \frac{3\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_V\big|_{q_e} = \begin{bmatrix} \pm mgL\frac{\lambda}{1+\lambda^2} & 0 \\ 0 & \pm\left(\frac{mgL\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{cdL}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \end{bmatrix}$$

il segno + vale in $q_e^{(1)}$
il segno − vale in $q_e^{(2)}$

Quindi

$$\frac{2}{3} m l^2 \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} & \\ & \frac{1+4\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm mgl & 0 \\ 0 & \pm\frac{L}{\sqrt{1+\lambda^2}}(mg\lambda + cd) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora,

in $q_e^{(1)}$: $$\begin{cases} \frac{2}{3} m l^2 \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \ddot{x}_1 + m g L x_1 = 0 \\ \frac{2}{3} m l^2 \frac{1+4\lambda^2}{1+\lambda^2} \ddot{x}_2 + \frac{L}{\sqrt{1+\lambda^2}} (mg\lambda + cd) x_2 = 0 \end{cases}$$

in $q_e^{(2)}$: $$\begin{cases} \frac{2}{3} m l^2 \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \ddot{x}_1 - m g L x_1 = 0 \\ \frac{2}{3} m l^2 \frac{1+4\lambda^2}{1+\lambda^2} \ddot{x}_2 - \frac{L}{\sqrt{1+\lambda^2}} (mg\lambda + cd) x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Poiché i vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi e la sollecitazione è conservativa, si conserva l'energia meccanica

$$E = K + V = \frac{1}{3} m l^2 \left[\sin^2\varphi\, \dot{\theta}^2 + (1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2\right] - L(mg\cos\theta\sin\varphi + cd\cos\varphi)$$