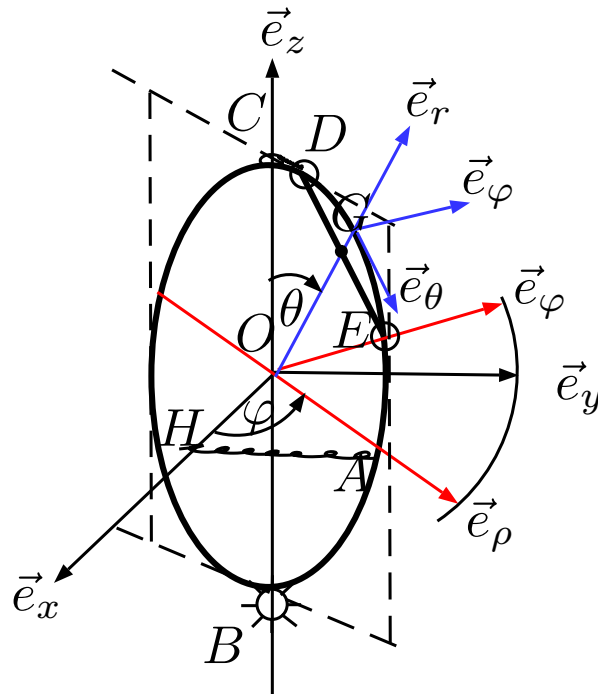


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 30 gennaio 2023

(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa M e raggio R , è vincolato ad un asse fisso verticale (O, \vec{e}_z) mediante un anellino in C e una cerniera sferica fissa in B . Un'asta omogenea di massa m e lunghezza R ha gli estremi D ed E vincolati sulla circonferenza con due cerniere sferiche scorrevoli. Una molla di costante elastica b collega l'estremo dell'asta D con il punto C dell'anello. Un'altra molla, di costante elastica c , collega A , punto medio di una delle semicirconferenze \widehat{BC} , con un punto H fissato all'asse orizzontale (O, \vec{e}_x) a distanza R da O . Tutti i vincoli sono supposti lisci e bilateri. Scelte come coordinate libere gli angoli $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ della figura, si chiede di:

STATICA

- 1) Individuare le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità.
Posto, da ora in poi, $b = \frac{mg}{R}$, disegnarle e determinare;
- 2) le reazioni vincolari esterne sull'anello nei punti B e C nella configurazione di equilibrio stabile;
- 3) le reazioni vincolari dell'anello sull'asta nei punti D ed E nella configurazione di equilibrio stabile.

DINAMICA

- 4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alla configurazione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni;
- 6) classificare il campo di velocità dell'asta DE .

Tema del 30/01/2023

Il modello è formato da un rigido con uno fimo, l'anello, e un altro rigido, l'asta, vincolato al primo. Con il metodo dei congelamenti meccanici si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi, può essere descritto dalle coordinate libere della figura $q = (\varphi, \theta)$ con

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Consideriamo le 3 basi:

$$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) : \text{"fimo"}$$

$$B' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) : \text{solidale all'anello}$$

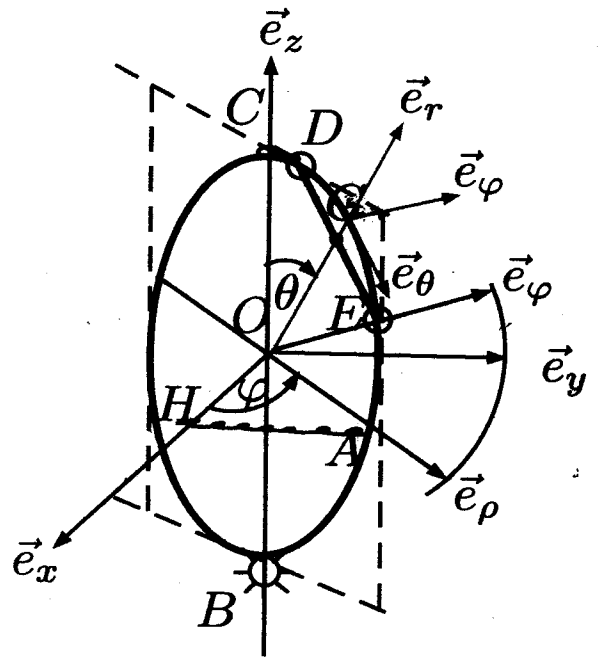
$$B'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) : \text{solidale all'asta}$$

$$(1.1) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.2) \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.3) \begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.4) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_\theta + \cos \theta \vec{e}_z \end{cases}$$



Quindi,

$$(2.1) \vec{x}_G = G-O = \overline{OG} \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2} R (\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$$

$$(2.2) G-B = (G-O) + (O-B) = \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z - R \vec{e}_z$$

$$(2.3) C-D = (C-O) + (O-D) = C-O + (O-G) + (G-D) = R \vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z + \frac{R}{2} \vec{e}_z$$

$$(2.4) A-H = (A-O) + (O-H) = R \vec{e}_y - R \vec{e}_x$$

$$(2.5) |C-D|^2 = R^2 \left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z + \frac{1}{2} \vec{e}_z \right) \cdot R \left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z + \frac{1}{2} \vec{e}_z \right)$$

$$= R^2 \left(1 - \sqrt{3} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z + \frac{1}{4} \right)$$

$$= R^2 \left(1 - \sqrt{3} \cos\theta - \sin\theta + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= R^2 (2 - \sqrt{3} \cos\theta - \sin\theta)$$

$$(2.6) |A-H|^2 = R^2 (\vec{e}_y - \vec{e}_x) \cdot (\vec{e}_y - \vec{e}_x) = R^2 (1 - 2\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + 1) = R^2 (2 - 2\cos\varphi)$$

$$(2.7) D-O = (D-G) + (G-O) = \frac{R}{2} \vec{e}_z + \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z$$

$$(2.8) E-O = (E-G) + (G-O) = \frac{R}{2} \vec{e}_z + \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z$$

N.B

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = \cos\varphi$

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = \sin\theta$

$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = \cos\theta$

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa poiché è costituita dal peso proprio del modello e dalla forza di richiamo delle molle che hanno, entrambe, un estremo fisso. Dunque, possiamo utilizzare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale V per trovare le configurazioni di equilibrio.

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad V(\varphi, \theta) &= -M \vec{x}_O \cdot \vec{g} - m \vec{x}_G \cdot \vec{g} + \frac{1}{2} (b \overline{CD}^2 + c \overline{AH}^2) \\
 &= -m \frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_y \cdot (-g \vec{e}_z) + \frac{1}{2} b R^2 (2 - \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) + \frac{c}{2} R^2 (1 - \cos \varphi) \\
 &= m g \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \theta + \frac{1}{2} b R^2 (2 - \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) + c R^2 (1 - \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

Calcoliamo i punti stazionari della funzione V

$$(3.2) \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = c R^2 \sin \varphi = -Q_\varphi$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -m g \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} b R^2 \sin \theta - \frac{1}{2} b R^2 \cos \theta = -Q_\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} R (-m g + b R) \sin \theta - \frac{1}{2} b R^2 \cos \theta = -Q_\theta
 \end{aligned}$$

Quindi, dobbiamo risolvere il sistema

$$(3.4) \quad \begin{cases} \sin \varphi = 0 \\ b R \cos \theta = \sqrt{3} (m g + b R) \sin \theta \end{cases}$$

Poiché $\theta = 0$ NON è soluzione delle II eq., il sistema (3.4) equivale a

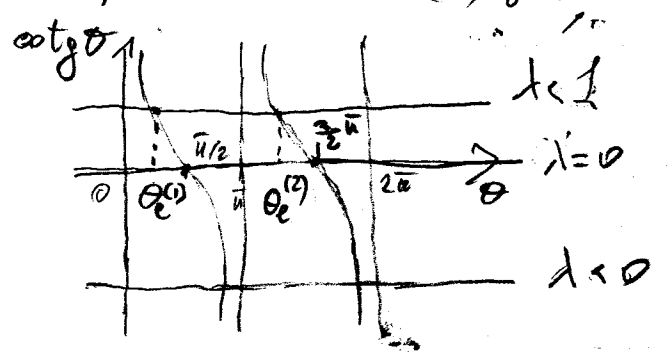
$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ vel } \varphi = \pi \\ \cotg \theta = \sqrt{3} \left(1 - \frac{m g}{b R}\right) = \sqrt{3} \lambda \end{cases}$$

Come al solito, risolviamo la II eq. del sistema (3.5) graficamente

E' evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
 la II eq. ha 2 soluzioni date da

$$\theta_e^{(1)} = \text{arccotg}(\sqrt{3}\lambda)$$

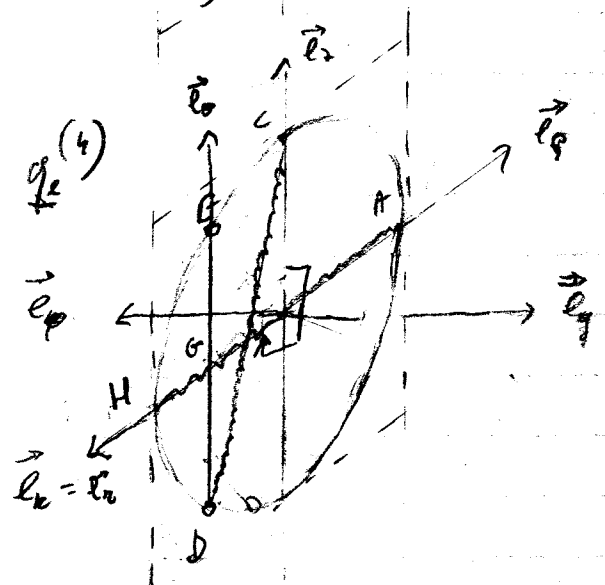
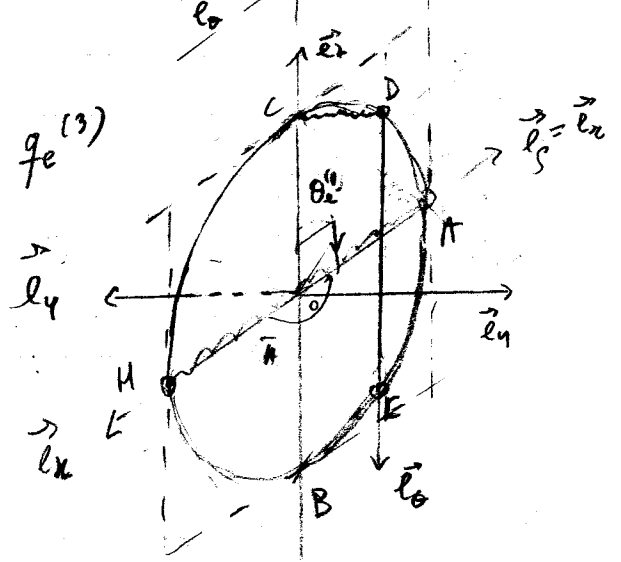
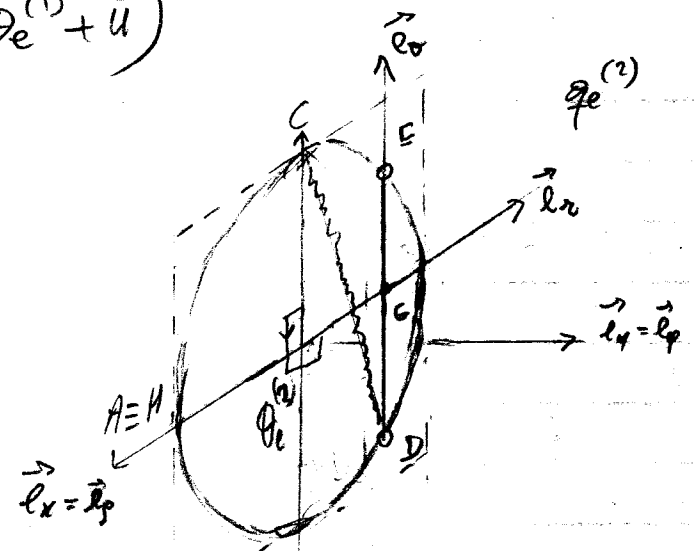
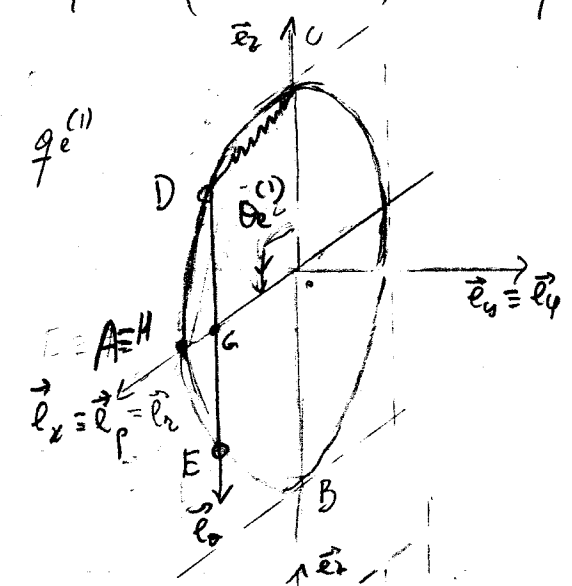
$$\theta_e^{(2)} = \theta_e^{(1)} + \bar{u}$$



Di conseguenza, il modello ammette 4 configurazioni di equilibrio

$$q_e^{(1)} = (0, \theta_e^{(1)}) , \quad q_e^{(2)} = (0, \theta_e^{(1)} + \bar{u})$$

$$q_e^{(3)} = (\bar{u}, \theta_e^{(1)}) , \quad q_e^{(4)} = (\bar{u}, \theta_e^{(1)} + \bar{u})$$



N.B. Le configurazioni di equilibrio sono diseguate per $b = \frac{mg}{IR}$

Per studiare la stabilità applichiamo i Tes. di Dirichlet-Lagrange e di \dots . Quindi, calcoliamo la matrice Hessiana di V nelle configurazioni di equilibrio.

$$(5.1) \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = cR^2 \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} h(-\mu g + bR) \cos \theta + \frac{1}{2} bR^2 \sin \theta$$

$$= + \frac{bR^2}{2} (\sqrt{3} \lambda \cos \theta + \sin \theta)$$

Quindi,

$$(5.2) \mathcal{H}_{V|q_e} = \begin{bmatrix} cR^2 \cos \varphi_e & 0 \\ 0 & \frac{bR^2}{2} \sin \theta_e (3\lambda^2 + 1) \end{bmatrix}$$

Dunque

$$(5.3) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(1)}} = cR^2 > 0, \quad \det \mathcal{H}|_{q_e^{(1)}} = cR^2 \frac{bR^2}{2} \sin \theta_e^{(1)} (3\lambda^2 + 1) > 0$$

$\Rightarrow q_e^{(1)}$ è un punto di min \Rightarrow stabile

$$(5.4) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(2)}} = cR^2 > 0, \quad \det \mathcal{H}|_{q_e^{(2)}} = \frac{bcR^4}{2} \sin \theta_e^{(2)} (3\lambda^2 + 1) < 0$$

$\Rightarrow q_e^{(2)}$ è un punto di max per $V \Rightarrow$ instabile

$$(5.5) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(3)}} = -cR^2 < 0 \Rightarrow q_e^{(3)}$$
 è un punto di sella \Rightarrow instabile

$$(5.6) \mathcal{H}_{11}|_{q_e^{(4)}} = -cR^2 < 0 \Rightarrow q_e^{(4)}$$
 è un punto di sella \Rightarrow instabile

In particolare, se $b = \frac{mg}{h}$ risulta che $\lambda = 0$, quindi

$$(5.7) \theta_e = \arccos \frac{g}{h} = \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$(5.8) \varphi_e^{(1)} = \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

2) Reazioni vincolari in B e C nell'anello, in $q_e^{(1)} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Dall'ipotesi di vincoli lisci, segue che

$$\mathcal{L}^{(ext, rest)} = \{ (B, \vec{\Phi}), (C, \vec{\Psi}) \} \text{ con } \vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Comunque, in tutte le configurazioni di equilibrio, poiché $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$, il problema si riduce ad uno piano, cioè

$$\vec{\Phi}_B = \phi_x \vec{e}_x + \phi_z \vec{e}_z, \quad \vec{\Psi}_C = \psi_x \vec{e}_x$$

Allora, scriviamo le II ECS e proiettiamole lungo i versori \vec{e}_x, \vec{e}_z .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Phi}_B + \vec{\Phi}_C + \vec{R}^{(ext, ext)} = \vec{0} \\ (C-B) \times \vec{\Phi}_C + \vec{M}_B^{(ext, ext)} = \vec{0} \end{array} \right. \text{ dove } \begin{array}{l} \vec{R} \Big|_{q_e^{(1)}} = (M+m) \vec{g} - c(A-H) \\ \vec{M}_B \Big|_{q_e^{(1)}} = (C-B) \times m \vec{g} + (A-B) \times c(A-H) \\ (C-B) \times \vec{\Phi}_C = 2R \vec{e}_z \times \psi_x \vec{e}_x = 2R \psi_x \vec{e}_y \end{array}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \vec{R} \Big|_{q_e^{(1)}} &= -(M+m) g \vec{e}_z \\ \vec{M}_B \Big|_{q_e^{(1)}} &= [(C-0) + (0-B)] \times (-mg \vec{e}_z) = \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_z \times (-mg \vec{e}_z) \\ &= -mg \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \sin 0 \cdot mg \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_\varphi \Big|_{q_e^{(1)}} = mg \frac{\sqrt{3}R}{2} \vec{e}_y \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{array}{l} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \phi_x + \psi_x = 0 \\ \phi_z - (M+m)g = 0 \\ 2R \psi_x + \frac{\sqrt{3}}{2} mg \frac{\sqrt{3}R}{2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi_x = +\frac{\sqrt{3}}{4} mg \\ \phi_z = (M+m)g \\ \psi_x = -\frac{\sqrt{3}}{4} mg \end{array} \right.$$

3) Reazioni vincolari in E e D sull'asta, in $q_e^{(1)} = (0, \frac{l}{2})$

Nelle configurazioni di equilibrio il problema è piano e dell'Hp. di vincoli

linari $f(\text{int} \rightarrow \text{ext}) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\}$ con $\begin{matrix} \vec{\xi}_D = \xi \text{ verso } (D-O) \\ \vec{\eta}_E = \eta \text{ verso } (E-O) \end{matrix}$

Quindi

$$\vec{\xi}_D^{(2)} = \frac{\xi}{2} \left(-\frac{\vec{l}_0}{2} + \sqrt{3} \vec{e}_r \right), \quad \vec{\eta}_E^{(2)} = \eta \left(\frac{\vec{l}_0 + \sqrt{3} \vec{e}_r}{2} \right)$$

Applichiamo la IECS sull'asta DE

$$\vec{\xi}_D + \vec{\eta}_E + \vec{R}_{|q_e^{(1)}} \stackrel{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})}{=} \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{|q_e^{(1)}} \stackrel{(\text{ext, att} \rightarrow \text{asta})}{=} &= m \vec{g} - b(D-C) = -m g \vec{e}_r + b R \left(\vec{e}_r - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_r + \frac{1}{2} \vec{l}_0 \right) \\ &= (bR - mg) \vec{e}_r + \frac{bR}{2} (-\sqrt{3} \vec{e}_r + \vec{l}_0) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(1.4)}{=} (bR - mg) \begin{pmatrix} -\sin \theta_e & \cos \theta_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{l}_0 \\ \vec{e}_r \end{pmatrix} + \frac{bR}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{l}_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[(bR - mg) \cos \theta_e - \frac{bR \sqrt{3}}{2} \right] \vec{e}_r + \left[-(bR - mg) \sin \theta_e + \frac{bR}{2} \right] \vec{l}_0$$

$$= -\frac{bR \sqrt{3}}{2} \vec{e}_r + \left(mg - \frac{bR}{2} \right) \vec{l}_0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi + \eta) = -\vec{R}_{|q_e^{(1)}} \cdot \vec{e}_r \\ \frac{1}{2} (-\xi + \eta) = -\vec{R}_{|q_e^{(2)}} \cdot \vec{l}_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta = bR - mg = 0 \\ \xi = mg \end{cases}$$

Quindi,

$$\vec{\xi}_D = mg \left(-\frac{\vec{l}_0 + \sqrt{3} \vec{e}_r}{2} \right) \Big|_{q_e^{(1)}}$$

$$\vec{\eta}_E = (bR - mg) \left(\frac{\vec{l}_0 + \sqrt{3} \vec{e}_r}{2} \right) \Big|_{q_e^{(2)}} = 0$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange per il modello. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica

$$(8.1) K = K^{(anallo)} + K^{(arta)}$$

$$(8.2) K^{(anallo)} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(anallo)} \cdot \mathbb{I}_0^{(anallo)} (\vec{\omega}^{(anallo)})$$

$$(8.3) K^{(arta)} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^{(arta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(arta)} (\vec{\omega}^{(arta)})$$

$$(8.4) \vec{\omega}^{(anallo)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\omega}^{(arta)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\theta + \cos\theta \vec{e}_r) + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi$$

$$(8.5) K^{(anallo)} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0^{(anallo)} (\dot{\varphi} \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0(\vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_z = \frac{1}{4} MR \dot{\varphi}^2$$

$$(8.6) \vec{V}_G = \dot{\vec{R}}_G = \frac{d}{dt} (G-O) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R \vec{e}_z \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R \dot{\vec{e}}_z = \frac{\sqrt{3}}{2} (\vec{\omega}^{(arta)} \times \vec{e}_z) R = \frac{\sqrt{3}}{2} (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) R \times \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2} (\dot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta) R$$

$$(8.7) |\vec{V}_G|^2 = \frac{3R^2}{4} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

$$(8.8) \mathbb{I}_G^{(arta)} (\vec{\omega}^{(arta)}) = \mathbb{I}_G^{(arta)} (\dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\theta + \cos\theta \vec{e}_r) + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) = -\dot{\varphi} \sin\theta \mathbb{I}_G(\vec{e}_\theta) + \dot{\varphi} \cos\theta \mathbb{I}_G(\vec{e}_r) + \dot{\theta} \mathbb{I}_G(\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{12} m R^2 (\dot{\varphi} \cos\theta \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi)$$

$$\frac{1}{2} \vec{\omega}^{(arta)} \cdot \mathbb{I}_G^{(arta)} (\vec{\omega}^{(arta)}) = \frac{1}{2} [\dot{\varphi} (-\sin\theta \vec{e}_\theta + \cos\theta \vec{e}_r) + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi] \cdot \frac{1}{12} m R^2 (\dot{\varphi} \cos\theta \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) = \frac{1}{24} m R^2 (\cos^2\theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)$$

Quindi,

$$\begin{aligned} K^{(orte)} &= \frac{3}{8} m R^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{24} m R^2 (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{24} m R^2 \left[(9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right] \\ &= \frac{1}{24} m R^2 \left[(1 + 8 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m R^2 \left[(1 + 8 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + 10 \dot{\theta}^2 \right] \\ &= \frac{1}{24} R^2 \left\{ [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \dot{\varphi}^2 + m 10 \dot{\theta}^2 \right\} \end{aligned}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \ddot{\varphi} + \frac{4}{12} m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$EL_{\varphi}: \frac{1}{12} R^2 [6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta)] \ddot{\varphi} + \frac{2}{3} m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = -c R^2 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{5}{6} m R^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{4}{24} m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{5}{6} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$EL_{\theta}: \frac{5}{6} m R^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{3} m R^2 \sin 2\theta \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{2} m g R \cos \theta$$

5) linearizzazione delle EL intorno a $q_e^{(1)} = (0, \frac{\pi}{2})$

Poiché la sollecitazione attiva è conservativa, le eq. linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio sono

$$A(q_e) \ddot{x} + H_v(q_e) x = 0 \quad x(t) = \frac{q(t) - q_e}{\epsilon}$$

$$A(q_e^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}^2} \end{bmatrix} \Big|_{q_e^{(1)}} = \frac{R^2}{12} \begin{bmatrix} 6M + m(1 + 8 \sin^2 \theta_e^{(1)}) & 0 \\ 0 & 10m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R^2}{12} \left[\begin{array}{c|c} 6M + 9m & 0 \\ \hline 0 & 10m \end{array} \right]$$

$$H_v(q_e^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|c} cR^2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{mgR}{2} \end{array} \right]$$

$$\frac{R^2}{12} \left[\begin{array}{c|c} 6M + 9m & 0 \\ \hline 0 & 10m \end{array} \right] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cR^2 & 0 \\ 0 & \frac{mgR}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2}{12} \left(\frac{M + 3m}{2} \right) \ddot{x}_1 + cR^2 x_1 = 0 \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{cR^4 - 4}{R^2 (2M + 3m)}} \\ \frac{5}{6} mR^2 \ddot{x}_2 + \frac{mgR}{2} x_2 = 0 \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{MgR^6}{2 \cdot 5MR^2}} \end{array} \right.$$

6) L'invariante scalare cinematico dell'asta vale:
 $I = \vec{v}_G \cdot \vec{\omega}^{(ext)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta) R \cdot \dot{\varphi} (-\sin \theta \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_1) + \dot{\theta} \vec{e}_\theta = 0$
 quindi il campo di velocità è rotatorio e l'axe di Mozzi diventa AIR.