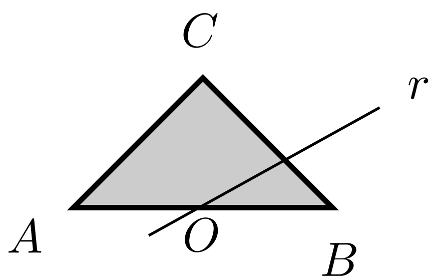
Compito di Meccanica Razionale

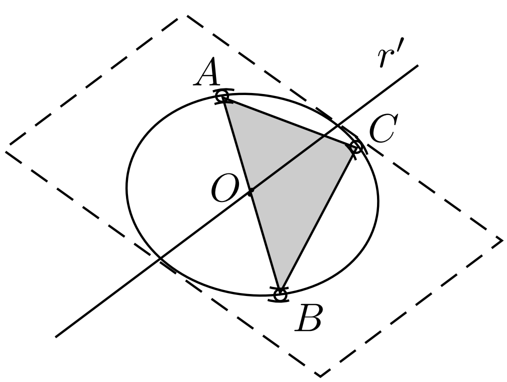
Trieste, 6 giugno 2022

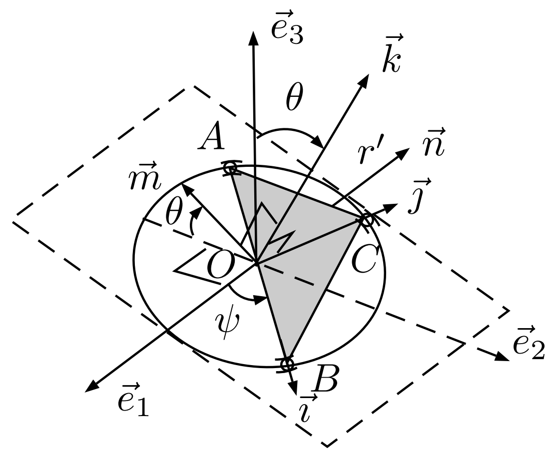
(G. Tondo)



È data una lamina rigida omogenea a forma di triangolo rettangolo isoscele con ipotenusa AB di lunghezza pari a $2R$ e massa m.

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r, passante per il punto O, medio di AB, e inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto al vettore $B - O$.





La lamina suddetta è vincolata, mediante tre appoggi lisci e bilateri nei vertici A, B, C, a scorrere all'interno di una guida circolare, di raggio R e massa trascurabile. Tale guida, a sua volta, è vincolata a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale r' passante per il centro della guida.

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio della lamina in funzione delle coordinate $-\pi < \theta, \psi \leq \pi$, disegnarle e discutere la loro stabilità;

3) determinare le reazioni vincolari nel punto C, nelle configurazioni di equilibrio stabille.

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio stabile, calcolare l'integrale generale e dire se il moto complessivo è periodico;

6) classificare il moto della lamina e giustificare la risposta.

Tema del 6/06/2022

1) Il baricentro G si trova sulla bisettrice CO a distanza da O pari a $\frac{1}{3}\overline{CO}$. Quindi

$$\overline{GO} = \frac{1}{3} R$$

Determiniamo la matrice d'inerzia $[I_O]$ rispetto alla terna $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ che è una TPI(O) poiché $(O;\vec{j})$ è un asse di simmetria materiale ortogonale.
Allora

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = I_{22} = \overset{(*)}{I} = \frac{1}{6} mR^2$$

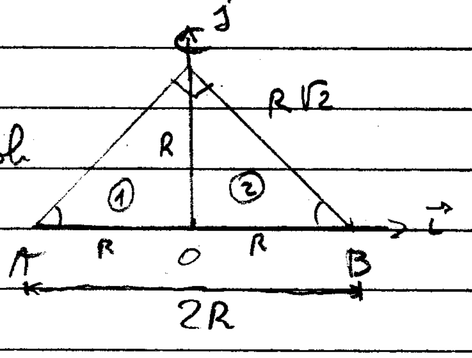
$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2I = \frac{1}{3} mR^2$$

Visto che $I_{11} = I_{22}$, l'EI(O) ha struttura giroscopica rs. all'asse $(O;\vec{k})$. Quindi,

$$I_r = I = \frac{1}{6} mR^2$$

Indichiamo con Π il piano della guida circolare e quindi della lamina.

N.B. Per calcolare I, basta suddividere il triangolo ABC nei due triangoli rettangoli uguali AOC e BOC
Allora si ha:



$$I_{11} = I = I^{(1)} + I^{(2)} = \frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\right)R^2 \cdot 2 = \frac{1}{6} mR^2$$

Cinematica: $\ell = 2$ del metodo dei congelamenti.

Consideriamo le basi disegnate in figura:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: fissa ($\vec{e}_3$ verticale ascendente)

$\mathcal{B}' = (\vec{n}, \vec{m}, \vec{K})$: intermedia ($\vec{n} = -\vec{e}_1$, $\vec{m} \perp \vec{n}$ et $\vec{m} \in \Pi$, $\vec{K} \perp \Pi$)

$\mathcal{B}''' = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{K})$: solidale

Le trasformazioni fra le basi sono:

$$(2.1)\ \begin{cases} \vec{n} = -\vec{e}_1 \\ \vec{m} = -\cos\theta\, \vec{e}_2 + \sin\theta\, \vec{e}_3 \\ \vec{K} = \sin\theta\, \vec{e}_2 + \cos\theta\, \vec{e}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_1 = -\vec{n} \\ \vec{e}_2 = -\cos\theta\, \vec{m} + \sin\theta\, \vec{K} \\ \vec{e}_3 = \sin\theta\, \vec{m} + \cos\theta\, \vec{K} \end{cases}$$

$$(2.2)\ \begin{cases} \vec{\imath} = -\cos\psi\, \vec{n} - \sin\psi\, \vec{m} \\ \vec{\jmath} = \sin\psi\, \vec{n} - \cos\psi\, \vec{m} \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{n} = -\cos\psi\, \vec{\imath} + \sin\psi\, \vec{\jmath} \\ \vec{m} = -\sin\psi\, \vec{\imath} - \cos\psi\, \vec{\jmath} \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases}$$

Quindi

$$(2.3)\quad G - O = \frac{R}{3}\vec{\jmath} = \frac{R}{3}\left(\sin\psi\, \vec{n} - \cos\psi\, \vec{m}\right) =$$

$$= \frac{R}{3}\left(-\sin\psi\, \vec{e}_1 - \cos\psi\left(-\cos\theta\, \vec{e}_2 + \sin\theta\, \vec{e}_3\right)\right)$$

N.B. Il punto O della lamina appartiene sempre all'asse orizzontale fisso $\vec{e}_1$, quindi è un punto fisso.

Statica: modello rigido

2) Poiché l'unica sollecitazione attiva, la forza peso, è conservativa, per trovare gli equilibri possiamo usare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale.

$$(3.1)\quad V(\theta,\psi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_G = -m\vec{g}\cdot(G-O)$$

$$= mg\,\vec{e}_3\cdot(G-O) \overset{(2.3)}{=} -mg\frac{R}{3}\sin\theta\cos\psi$$

Quindi,

$$(3.2)\quad \frac{\partial V}{\partial\theta} = -Q_\theta = -mg\frac{R}{3}\cos\theta\cos\psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial\psi} = -Q_\psi = +mg\frac{R}{3}\sin\theta\sin\psi$$

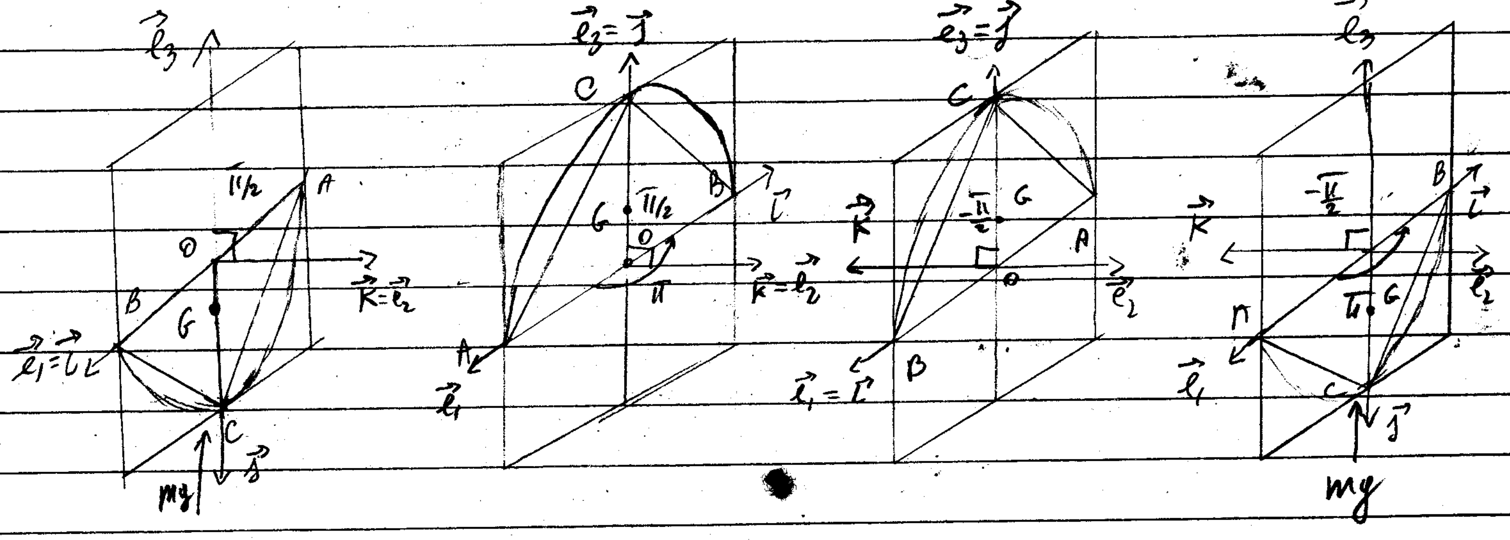
Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$(3.3)\quad \begin{cases}\cos\theta\cos\psi = 0\\ \sin\theta\sin\psi = 0\end{cases} \iff i)\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\psi = 0\end{cases} \text{ vel } ii)\begin{cases}\sin\theta = 0\\ \cos\psi = 0\end{cases}$$

Le configurazioni di equilibrio $q_e \equiv (\theta_e, \psi_e)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema i) e quelle del sistema ii)

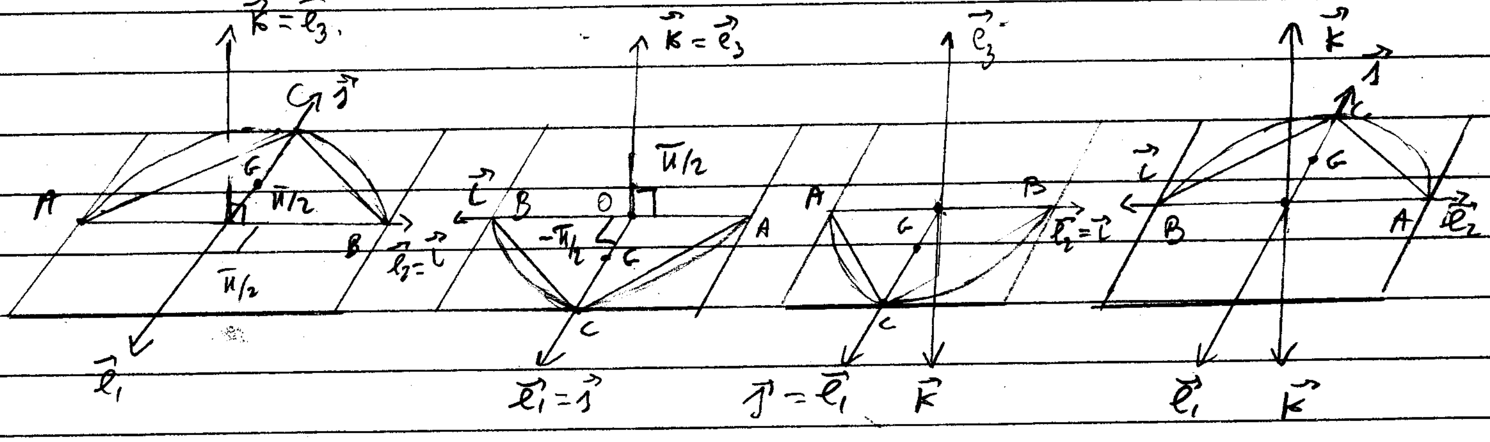
Il sistema i) ha soluzione $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$; $\varphi = 0, \pi$, quindi

$$q_e^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad q_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad q_e^{(3)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad q_e^{(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$



Il sistema ii) ha soluzioni $\theta = 0, \pi$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, quindi

$$q_e^{(5)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad q_e^{(6)} = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad q_e^{(7)} = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad q_e^{(8)} = \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$$



Calcoliamo la matrice Hessiana di V. Dalla (3.2) segue,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{mgR}{3} \sin\theta \cos\psi \, , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial \theta} = \frac{mgR}{3} \cos\theta \sin\psi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \psi} = \frac{mgR}{3} \cos\theta \sin\psi \, , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \frac{mgR}{3} \sin\theta \cos\psi .$$

Quindi

$$\mathcal{H}(\theta, \psi) = \frac{mgR}{3} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\theta \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}(\theta, \psi) = \frac{mgR}{3} \sin\theta \cos\psi \, , \quad \det \mathcal{H} = \left(\frac{mgR}{3}\right)^2 \left(\sin^2\theta \cos^2\psi - \cos^2\theta \sin^2\psi\right)$$

Quindi,

$$\mathcal{H}_{11}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{mgR}{3} > 0 \, , \quad \mathcal{H}_{11}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = -mgR < 0 \, , \quad \mathcal{H}_{11}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = -mgR < 0$$

$$\mathcal{H}\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \frac{mgR}{3} > 0 \, , \quad \det \mathcal{H}\big|_{q_e^{(i)}} > 0 \, , \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio

$q_e^{(1)}$ e $q_e^{(4)}$ sono stabili, le altre due instabili.

Invece, nelle soluzioni del sistema (3.3 ii) si trova:

$$\mathcal{H}_{11}\big|_{q_e^{(i)}} = 0 \, , \quad \det \mathcal{H}\big|_{q_e^{(i)}} < 0 \, , \quad i = 5, 6, 7, 8 .$$

Quindi, le configurazioni $q_e^{(i)}$, $i = 5, 6, 7, 8$, sono tutte instabili.

3) Reazioni vincolari in C agli equilibri $q_e^{(1)}, q_e^{(4)}$

Poichè i tre vincoli sono appoggi lisci, le reazioni vincolari si possono schematizzare come

$$\mathcal{L}^{reat} = \left\{ (A, \vec{\phi}_A), (B, \vec{\phi}_B), (C, \vec{\phi}_C) \right\} \quad \text{con } \vec{\phi}_A \cdot \vec{j} = \vec{\phi}_B \cdot \vec{j} = \vec{\phi}_C \cdot \vec{i} = 0$$

Inoltre, poichè nelle configurazioni suddette, le reazioni saranno tutte nel piano della guida, si ha

$$\vec{\phi}_A = \phi_A \vec{i}, \quad \vec{\phi}_B = \phi_B \vec{i}, \quad \vec{\phi}_C = \phi_C \vec{j}$$

Allora, dalle ECS segue

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{R}^{(est,reat)} = \vec{0} \\ \vec{M}_C^{(est,att)} + \vec{M}_C^{(est,reat)} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} m\vec{g} + \vec{\phi}_A + \vec{\phi}_B + \vec{\phi}_C = \vec{0} \\ \cancel{(G-C) \times m\vec{g}} + (A-C) \times \vec{\phi}_A + (B-C) \times \vec{\phi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} mg\vec{j} + (\phi_A + \phi_B)\vec{i} + \phi_C \vec{j} = \vec{0} \\ \phi_B R \vec{k} + \phi_A R \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

Dunque, otteniamo le tre eq. scalari (dipendenti)

$$\begin{cases} \phi_C + mg = 0 \\ \phi_A + \phi_B = 0 \\ \phi_A + \phi_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\phi_C = -mg} \qquad \phi_B = -\phi_A$$

Dinamica

4) Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica della lamina (con punto fisso O)

$$(7.1) \quad K = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega})$$

dove, per il Teo di Frisi, abbiamo

$$(7.2) \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\, \vec{e}_1 + \dot{\psi}\, \vec{k} \overset{(2.2)}{=} \dot{\theta}\left(\cos\psi\, \vec{i} - \sin\psi\, \vec{j}\right) + \dot{\psi}\, \vec{k}$$

Quindi

$$(7.3) \quad K = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}\cos\psi, -\dot{\theta}\sin\psi, \dot{\psi}\right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(I\dot{\theta}^2\cos^2\psi + I\dot{\theta}^2\sin^2\psi + 2I\dot{\psi}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}^2\right) = \frac{1}{12} mR^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}, \dot{\psi}\right] mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$EL_\theta: \quad \frac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{\cancel{6}\,2}\,\ddot{\theta} = \cancel{m}\, g\, \frac{\cancel{R}}{\cancel{3}} \cos\theta\cos\psi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{2g}{R}\cos\theta\cos\psi$$

$$EL_\psi: \quad \frac{1}{\cancel{3}}\,\cancel{m}R^{\cancel{2}}\,\ddot{\psi} = -\cancel{m}\, g\, \frac{\cancel{R}}{\cancel{3}} \sin\theta\sin\psi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\psi} = -\frac{g}{R}\sin\theta\sin\psi$$

5) Linearizzazione delle EL in $q_e^{(1)}$, $q_e^{(4)}$

Poichè la sollecitazione è conservativa, possiamo scrivere

$$A\underline{\ddot{x}} + \mathcal{V}\underline{x} = \underline{0} \qquad \varepsilon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_e \\ \psi_e \end{bmatrix}$$

con

$$A = A(q_e) \quad , \quad \mathcal{V} = \mathcal{H}_V(q_e)$$

Quindi

$$\frac{mR^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{mgR}{\cancel{3}}\begin{bmatrix} \sin\theta_e\cos\psi_e & \cos\theta_e\sin\psi_e \\ \cos\theta_e\sin\psi_e & \sin\theta_e\cos\psi_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque, in $q_e^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $q_e^{(2)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\begin{cases} \frac{R}{2}\ddot{x}_1 + g\,x_1 = 0 \\ R\,\ddot{x}_2 + g\,x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2g}{R}x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{R}x_2 = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema linearizzato è

$$x_1 = a_1\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}\,t + \alpha_1\right) \quad , \quad x_2 = a_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \alpha_2\right)$$

Il rapporto fra le due pulsazioni è

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\cancel{g}}{\cancel{R}}\frac{2\cancel{R}}{\cancel{g}}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \text{moto quasi-periodico.}$$

6) Classificazione del moto

Il moto della lamina è un moto con punto fisso in cui si conserva l'angolo tra l'asse fisso $\vec{e}_1$ e l'asse solidale $\vec{k}$, angolo pari a $\frac{\pi}{2}$. Quindi è un moto di <u>precessione</u>. Ciò equivale al fatto che la velocità angolare ha la forma (7.2), con $\dot{\theta}\,\vec{e}_1$ velocità angolare di precessione e $\dot{\varphi}\,\vec{k}$ velocità angolare di rotazione propria.