

Sistemi Dinamici Non-lineari

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy

Email: mcirafici@units.it

Dispense per uso interno - da ricontrollare

24 maggio 2022

Indice

| | | |
|----|---------------------------------------|----|
| 1 | Sistemi dinamici non-lineari | 1 |
| 2 | Stabilità | 2 |
| 3 | Insiemi ω -limite e attrattori | 6 |
| 4 | Sistemi gradiente | 7 |
| 5 | Sistemi Hamiltoniani | 9 |
| 6 | Dinamica di Poisson | 11 |
| 7 | Il teorema del ritorno | 12 |
| 8 | Cenni alla teoria ergodica | 14 |
| 9 | Coniugazione topologica | 16 |
| 10 | Mappa di Poincaré | 19 |
| 11 | Varietà invarianti | 20 |

1 Sistemi dinamici non-lineari

Cominciamo adesso lo studio dei sistemi dinamici non-lineari in dimensione arbitraria. In questo caso non c'è una strategia generale per risolvere il sistema, ma una serie di tecniche che andremo ad introdurre.

Consideriamo il sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

dove le funzioni f sono non-lineari

Equilibrio e isocline. Le soluzioni più semplici sono i punti critici o di equilibrio, o punti fissi, cioè i valori x^* per cui $f(x^*) = 0$. Per avere un'idea di quale è l'andamento del flusso, possiamo studiare le isocline. In notazione vettoriale, $f = (f_1, \dots, f_n)$ dove ogni $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, le isocline sono superfici definite dalle equazioni $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$. Siccome nel sistema dinamico è presente l'equazione $\dot{x}_i = f_i$, la superficie definita da $f_i = 0$ divide lo spazio delle fasi in due regioni, nelle quali \dot{x}_i ha un segno definito. Quindi se riusciamo a determinare tutte le isocline, abbiamo diviso lo spazio delle fasi in regioni all'interno delle quali sappiamo la direzione del campo vettoriale, e possiamo avere un'idea qualitativa dell'andamento del flusso in tutto lo spazio delle fasi. Questo approccio è utile soprattutto per i sistemi planari.

Linearizzazione. Per studiare l'andamento locale del sistema dinamico vicino alle soluzioni di equilibrio possiamo linearizzarlo. Questo vuol dire espandere x in serie al primo ordine. Se

$x(t) = x^* + \delta x(t)$, allora

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\delta x(t) = f(x^* + \delta x(t)) = f(x^*) + Df(x^*)\delta x(t) = Df(x^*)\delta x(t) \quad (1.2)$$

dove abbiamo usato che $f(x^*) = 0$ all'equilibrio. Qui $Df(x^*)$ è la matrice Jacobiana $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ calcolata al punto di equilibrio x^* . In particolare $Df(x^*) \equiv A$ è una matrice costante. Quindi vicino al punto di equilibrio il sistema dinamico assume la forma

$$\dot{y} = Ay \quad (1.3)$$

che abbiamo imparato a risolvere nelle lezioni precedenti.

La struttura locale è quindi determinata dagli autovalori della matrice Jacobiana A . Questi sono associati con l'autospazio $E = E^s \oplus E^c \oplus E^u$.

Definizione 1.4. *Un punto di equilibrio si dice iperbolico se gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale non nulla, cioè $E^c = \emptyset$. Gli equilibri iperbolici si dicono*

- *Pozzi: tutti gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale negativa, $E = E^s$*
- *Sorgenti: tutti gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale positiva, $E = E^u$*
- *Sella: altrimenti, $E = E^s \oplus E^u$*

Addizionalmente a questi tre casi possiamo aggiungere gli attributi qualificativi

- *Fuoco: c'è un sottospazio con autovalori complessi con parte reale non-zero*
- *Centro: c'è un sottospazio con autovalori puramente immaginari*

La linearizzazione del sistema dinamico lo approssima vicino al punto di equilibrio. Vedremo in seguito più in dettaglio la relazione tra il sistema linearizzato e quello non lineare.

2 Stabilità

Vediamo adesso come caratterizzare la stabilità dei punti di equilibrio nel caso non-lineare. In questo caso una definizione migliore di stabilità misura quanto orbite che partono vicine, restano vicine nel tempo.

Definizione 2.1. *Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice stabile (à la Liapunov) se per ogni intorno U , possiamo trovare un intorno $V \subset U$ tale che ogni soluzione $x(t) = \varphi_t(x)$ che inizia in V (cioè con dato iniziale in V), rimane in U per ogni $t \geq 0$. Se x^* non è stabile, lo chiamiamo instabile*

Similmente abbiamo

Definizione 2.2. *Il punto di equilibrio x^* si dice asintoticamente stabile se è stabile, e in aggiunta possiamo scegliere V in modo tale che $|x(t) - x^*| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, per ogni dato iniziale in V .*

Le definizioni sono illustrate in figura 1.

Ad esempio un equilibrio che è stabile ma non asintoticamente stabile è l'origine per il sistema lineare $\dot{x} = Ax$, dove gli autovalori di A sono puramente immaginari: in questo caso tutte le orbite sono ellissi, che quindi rimangono vicino all'origine senza raggiungerlo.

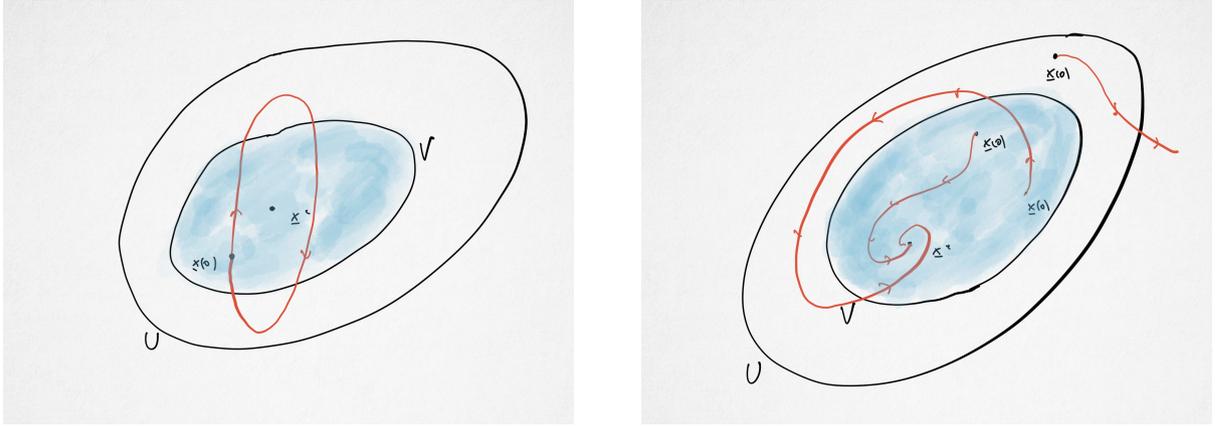


Figura 1: Stabilità (a sinistra) e stabilità asintotica (a destra). In entrambi i casi x^e denota il punto di equilibrio, e $x(0)$ i possibili dati iniziali negli insiemi U e V .

In generale è difficile stabilire la stabilità o la stabilità asintotica di un punto fisso. Esistono però dei criteri utili. Ad esempio abbiamo che la stabilità asintotica lineare implica la stabilità asintotica:

Teorema 2.3. *Sia x^* un punto di equilibrio tale che tutti gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale minore di zero. Allora x^* è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Il teorema si può dimostrare direttamente, stimando l'andamento delle soluzioni all'infinito. Tuttavia, siccome segue dal teorema di Hartman-Grobman, che vedremo in seguito \square

Per determinare la stabilità di un punto di equilibrio esiste il seguente criterio, dovuto a Liapunov.

Definizione 2.4. *Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t e sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. L è detta una funzione di Liapunov per x^* se esiste un intorno aperto U di x^* tale che $L(x^*) = 0$, e $\forall x \in U \setminus x^*$ valgono*

- $L(x) > 0$
- $L(\varphi_t(x)) < L(x)$ per $t > 0$

Se nell'ultima condizione abbiamo $L(\varphi_t(x)) \leq L(x)$, allora L è detta una funzione di Liapunov debole.

In generale non c'è un algoritmo per trovare una funzione di Liapunov. Notiamo inoltre che se L è C^1 , la seconda condizione segue se richiediamo che la derivata rispetto al tempo di L sia negativa. Ciò equivale a

$$\frac{d}{dt}L(x) = \nabla L(x) \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla L(x) \cdot f(x) < 0 \quad (2.5)$$

Quindi in questo caso la condizione diventa che il gradiente di L punta in direzione opposta al campo vettoriale f . Nel seguito assumeremo sempre di trovarci in questa situazione.

Vale il seguente risultato:

Teorema 2.6. *Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t . Se possiamo trovare una funzione di Liapunov L per x^* , allora x^* è stabile. Se L è una funzione di Liapunov debole, allora x^* è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Prendiamo $\delta > 0$ tale che la palla $B_\delta(x^*)$ di raggio δ sia tutta contenuta in U . Consideriamo la sfera $\partial B_\delta(x^*)$ e chiamiamo m il valore minimo di L su questa sfera. Siccome $L > 0$, allora $m > 0$. Poniamo $U_1 = \{x \in B_\delta(x^*) | L(x) < m\}$. Siccome L non aumenta lungo le orbite, $L(\varphi_t(x)) < m$, nessuna soluzione che inizia dentro U_1 può arrivare a $\partial B_\delta(x^*)$. Quindi ogni soluzione che inizia in U_1 non lascia mai $B_\delta(x^*)$, e abbiamo dimostrato che x^* è stabile.

Per dimostrare la stabilità asintotica, assumiamo ora che L sia strettamente decrescente lungo le orbite in $U \setminus x^*$. Prendiamo una soluzione $x(t)$ che inizi in $U_1 \setminus x^*$ e supponiamo $x(t_n) \rightarrow z_0$ per una sequenza $t_n \rightarrow \infty$ (z_0 esiste perchè la palla è compatta). In particolare siccome L è continua $L(\varphi_{t_n}(x)) \rightarrow L(z_0)$ per $t_n \rightarrow \infty$; siccome L è decrescente lungo le orbite, $L(\varphi_t(x)) > L(z_0)$.

Supponiamo per assurdo che $z_0 \neq x^*$. Prendiamo $z(t)$ la soluzione con dato iniziale z_0 . Allora per ogni $s > 0$, siccome z_0 non è l'equilibrio, $L(z(s)) < L(z_0)$. Per continuità per ogni soluzione $y(s)$ sufficientemente vicino a z_0 abbiamo che $L(y(s)) < L(z_0)$. Adesso scegliamo $y(0) = x(t_n)$, visto che per n abbastanza grande $x(t_n)$ è arbitrariamente vicino a z_0 . Troviamo la contraddizione $L(\varphi_{t_n+s}(x)) < L(z_0)$. Quindi $x^* = z_0$ e siccome tutti i punti limite del flusso sono a x^* , x^* è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. \square

Esempio 2.7. *Il sistema di Lorenz è un modello semplificato per fenomeni atmosferici*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{2.8}$$

dove $\sigma, b, r > 0$. Si vede subito che $(0, 0, 0)$ è un punto di equilibrio e in particolare

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\tag{2.9}$$

e quindi la direzione z è autovettore con autovalore $-b$ ed è attrattivo per $b > 0$. Per gli altri due autovalori abbiamo

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0\tag{2.10}$$

Allora siccome $\sigma > 0$ nel piano (x, y) l'origine è attrattivo per $r < 1$ ma è una sella per $r > 1$. Quindi nello spazio tridimensionale l'origine è asintoticamente stabile per $r < 1$ e instabile per $r > 1$. L'analisi lineare non dice niente riguardo a $r = 1$.

Costruiamo una funzione di Liapunov, partendo da $L = Ax^2 + By^2 + Cz^2$, con A, B, C coefficienti

positivi da determinare. Derivando

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= 2A\dot{x}x + 2B\dot{y}y + 2C\dot{z}z \\
&= 2A\sigma(y-x)x + 2B(rx-y-xz)y + 2C(xy-bz)z \\
&= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2Brxy - 2By^2 - 2Bxzy + 2Cxyz - 2Cbz^2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Per eliminare il termine xyz poniamo $B = C$. Troviamo

$$(2A\sigma + 2Br)xy - 2A\sigma x^2 - 2By^2 - 2Bbz^2 \tag{2.12}$$

Se scegliamo $A = \frac{1}{2\sigma}$ e $B = \frac{1}{2}$, completando il quadrato troviamo

$$\frac{dL}{dt} = -\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right)y^2 - bz^2 \tag{2.13}$$

Vediamo allora che per $r < 1$ e $b > 0$ $\frac{dL}{dt} < 0$ e quindi l'origine è asintoticamente stabile anche nella teoria non-lineare.

Notiamo che per $r = 1$, $\frac{dL}{dt}|_Z = 0$ con $Z = \{(x, y, z) : x = y, z = 0\}$, e quindi non è di Liapunov forte. Nonostante questo siccome Z non è invariante in avanti si può concludere che anche per $r = 1$ l'origine è asintoticamente stabile. Questo segue dal seguente teorema.

Teorema 2.14. (Principio di LaSalle) Sia x^* un punto di equilibrio per φ_t e L una funzione di Liapunov debole, definita su un intorno U di x^* . Assumiamo inoltre che U sia compatto e invariante in avanti. Sia $Z = \{x \in U : \frac{dL}{dt} = 0\}$ l'insieme dove L non decresce. Allora se il punto $\{x^*\}$ è l'unico sottoinsieme invariante in avanti di Z , è asintoticamente stabile.

Sketch. Dalla dimostrazione del teorema di Liapunov, seconda parte, ma adesso prendendo una funzione di Liapunov debole (le disuguaglianze diventano deboli), vediamo che se $x \in U$ e $x(t) \rightarrow z$ (sempre in U perché è invariante in avanti) vale $L(\varphi_s(z)) = L(z)$, $\forall s > 0$.

Allora $\varphi_s(x) \in Z$, $\forall s > 0$. Quindi l'orbita di z deve essere un sottoinsieme invariante in avanti di Z . Allora per ipotesi $z = x^*$. \square

Esempio 2.15. Prendiamo l'oscillatore armonico con attrito ($\mu > 0$) $\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2x = 0$, e cioè

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -\mu y - \omega^2 x
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Prendiamo $L = \omega^2 x^2 + y^2$. Allora

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \omega^2 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\
&= \omega^2 2xy + 2y(-\mu y) + 2\mu(-\omega^2 x) \\
&= -2\mu y^2 \leq 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Vediamo però che $Z = \{(x, y) : \frac{dV}{dt} = 0\} = \{(x, y) : y = 0\}$. Siccome $(0, 0)$ è l'unico punto fisso di Z è asintoticamente stabile e dopo un certo tempo l'oscillatore armonico smorzato si fermerà.

3 Insiemi ω -limite e attrattori

Consideriamo le orbite

$$\Gamma_x = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\} \quad (3.1)$$

e analogamente Γ_x^+ e Γ_x^- per $t > 0$ e $t < 0$. Vogliamo caratterizzare le orbite attraverso il loro comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$. Un punto limite y è definito da $\varphi_t(x) \rightarrow y$ se esiste una sequenza $t_1 < t_2 < \dots < t_k \dots$ tale che $t_k \rightarrow \infty$ (stiamo usando qui la definizione topologica di limite, per essere generali; se lo spazio delle fasi ha una nozione di distanza, questa coincide con la definizione usuale).

Definizione 3.2. *L'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^+ , cioè tutti quei punti y tali che $\varphi_t(x) \rightarrow y$ per una qualche sequenza, è detto l'insieme $\omega(x)$ -limite della traiettoria.*

Siccome tutti i punti nella stessa traiettoria tendono allo stesso limite, useremo anche la notazione $\omega(\Gamma_x)$. Allo stesso modo l'insieme α -limite $\alpha(x)$ è l'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^- .

Esempi semplici di insieme ω -limite sono i punti di equilibrio asintoticamente stabili. Un altro esempio sono i cicli limite

Definizione 3.3. *Un ciclo limite è un'orbita periodica γ che è l'insieme ω -limite o α -limite di un punto $x \notin \gamma$.*

Quindi un ciclo limite è una curva chiusa invariante con la proprietà che traiettorie vicine spiraleggiano verso o allontanandosi da γ . In particolare è chiuso e invariante $\varphi_t(\gamma) = \gamma$.

L'insieme ω -limite è un insieme invariante. Infatti se $y \in \omega(x)$, allora possiamo trovare una sequenza t_k tale che $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow y$. Per continuità, fissato un $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_{s+t_k}(x) \rightarrow \varphi_s(y)$ e quindi $\varphi_s(y) \in \omega(x)$.

In maniera simile possiamo definire il concetto di *attrattore* come un insieme invariante verso il quale si muovono tutte le traiettorie. Per rendere questo concetto più preciso, dobbiamo estendere l'idea di stabilità ad un insieme invariante arbitrario. Quindi diremo che un insieme invariante Λ è stabile se per ogni intorno U di Λ possiamo trovare un sottoinsieme V di U tale che tutte le traiettorie che partono da V restano in U per $t > 0$. Similmente diremo che un insieme invariante Λ è asintoticamente stabile se è stabile ed esiste un intorno U tale che per ogni $x \in U$ la distanza tra le traiettorie $\varphi_t(x)$ e Λ tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

Definizione 3.4. *Un insieme N viene detto regione di intrappolamento (trapping region) se è compatto e $\varphi_t(N) \subset \text{int}(N)$ per $t > 0$*

Nella definizione $\text{int}(N)$ denota l'interno dell'insieme N . Si tratta quindi di una regione invariante in avanti, con la proprietà che ogni traiettoria che inizia nella trapping region, si sposta al suo interno e vi rimane. Esemplice costruire una trapping region, basta cercare un una regione compatta tale che il campo vettoriale punti verso il suo interno ad ogni punto del suo bordo.

Un insieme attrattivo è l'insieme invariante più grande all'interno di una regione di intrappolamento

Definizione 3.5. Un insieme Λ si dice un insieme attrattivo se c' è una regione di intrappolamento compatta $N \supset \Lambda$ tale che

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \varphi_t(N) \quad (3.6)$$

In particolare è facile vedere che un insieme attrattivo è asintoticamente stabile: per definizione ogni punto in una regione di intrappolamento N , rimane in N e quindi Λ è stabile; inoltre tende a Λ , che quindi è asintoticamente stabile.

Ad ogni insieme attrattivo possiamo associare il suo *bacino di attrazione*, cioè l'insieme $W^s(\Lambda)$ tali che per ogni punto x , il flusso $\varphi_t(x)$ ha limite per $t \rightarrow \infty$ un punto di Λ .

Per finire abbiamo la¹

Definizione 3.7. Un insieme Λ si dice un attrattore se è un insieme attrattivo e ed esiste un punto x tale che $\Lambda = \omega(x)$.

Un attrattore è praticamente una delle componenti fondamentali di un insieme attrattivo; in un certo senso è un insieme attrattivo minimo. Esistono tuttavia diverse definizioni di attrattore a seconda del contesto. Notiamo che non ogni punto ω è un attrattore, va soddisfatta anche la condizione di essere un insieme attrattivo. Di solito attrattori sono punti o orbite semplici. Tuttavia esistono casi in cui un attrattore ha una geometria più complicata. In questo caso parliamo di *attrattore strano*.

4 Sistemi gradiente

Consideriamo una funzione reale $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ per $U \subset \mathbb{R}^n$ e il suo gradiente $\nabla V(x) = \text{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$. Chiamiamo un sistema dinamico un sistema gradiente se

$$\dot{x} = -\nabla V(x) \quad (4.1)$$

In particolare notiamo la proprietà

$$dV(x)y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = \nabla V \cdot y \quad (4.2)$$

In parole, il differenziale di V è una mappa lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi, il suo valore calcolato sul vettore y può essere rappresentato dal prodotto scalare con un vettore (teorema di riesz). Questo ci dà un importante risultato sulla derivata di V lungo il flusso

$$\frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) = dV(\varphi_t(x)) \frac{d}{dt} \varphi_t(x) = dV(\varphi_t(x)) (-\nabla V) = -\nabla V \cdot \nabla V = -|\nabla V|^2 \quad (4.3)$$

¹Questa definizione è motivata dal seguente ragionamento. Un insieme S si dice un insieme minimale se è chiuso, non vuoto, invariante in avanti e non contiene nessun sottoinsieme con le stesse proprietà. Un insieme minimale è caratterizzato dalla seguente proprietà: supponiamo che S sia compatto. Allora S è minimale se e solo se per ogni $x \in S$ abbiamo $S = \omega(x)$. Vediamo perché: prima assumiamo che $S = \omega(x)$ ma non sia minimale. Allora esiste un chiuso $B \subset S$ che è invariante. Tuttavia se $x \in B$, allora $\omega(x) \subset B$. Quindi abbiamo una contraddizione e allora S è minimale. Viceversa, assumiamo che S sia minimale, ma ci sia un $x \in S$ per il quale $\omega(x) \not\subset S$. Siccome S è compatto, allora anche $\omega(x)$ lo è. Inoltre siccome è un ω -limite $\omega(x)$ è invariante. Quindi S ha un sottoinsieme invariante, e abbiamo una contraddizione.

Abbiamo quindi dimostrato

Teorema 4.4. $\dot{V} \leq 0$ lungo il flusso, e $\dot{V}(x) = 0$ se e solo se x^* è un punto di equilibrio.

Prendiamo x^* un minimo isolato di V . Allora x^* è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema gradiente. Questo segue dal fatto che $V(x) - V(x^*)$ è una funzione di Liapunov. In particolare un sistema gradiente non ammette soluzioni periodiche non-costanti, perché su soluzioni non-costanti V decresce strettamente.

Consideriamo le superfici di livello

$$N_c = \{x : V(x) = c\} \quad (4.5)$$

Un punto $x \in N_c$ è regolare se $\nabla V \neq 0$. In questo caso usando il teorema della funzione implicita, vediamo che le superfici di livello sono infatti il grafico di una funzione. Consideriamo un punto regolare; per definizione lo spazio tangente è il kernel del differenziale della funzione

$$T_x N_c = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : dV(x)\xi = 0 \} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \nabla V \cdot \xi = 0 \} \quad (4.6)$$

Infatti se prendiamo un vettore ξ tangente a N_c , possiamo trovare una curva $\gamma(t)$ in N_c tale che $\gamma'(0) = \xi$. Siccome V è costante in N_c , vediamo che

$$dV(x)(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V \circ \gamma(t) = 0 \quad (4.7)$$

e quindi lo spazio tangente è il kernel del differenziale. Quindi vediamo che in un punto regolare il gradiente ∇V è *ortogonale* alle superfici di livello di V . Questo ci da una visione più geometrica dei sistemi gradiente. Infatti, siccome per definizione le orbite del sistema dinamico sono tangenti a $-\nabla V$, queste attraversano in modo ortogonale le superfici di livello (per punti regolari).

Teorema 4.8. *Sia y un punto α -limite o un punto ω -limite di una traiettoria del flusso gradiente. Allora y è un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Supponiamo che y is un punto ω limite. Allora (come nella dimostrazione del teorema di La Salle), V è costante lungo la soluzione passante per y .

Rivediamo perchè. Siccome $V(x(t))$ decresce, $V(x(t)) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} V(x(t)) = \alpha$. Se $y \in \omega(x)$, allora esiste una sequenza $t_k \rightarrow \infty$ tal che $x(t_k) \rightarrow y$ e siccome V è continua $\lim_{t_k \rightarrow \infty} V(x(t_k)) = V(y) = \alpha$. Questo è vero per ogni $y \in \omega(x)$, e quindi $\forall y \in \omega(x)$ abbiamo che $V(y) = \alpha$. Inoltre siccome $\omega(x)$ è invariante lungo il flusso, $\forall y \in \omega(x)$, $V(x(t)) = V(y) = \alpha$. Allora V è costante.

Allora deve essere $\dot{V}(y) = 0$, $\forall y \in \omega(x)$ e quindi è un punto di equilibrio. \square

Teorema 4.9. *Un sistema dinamico gradiente linearizzato ad un punto di equilibrio ha solo autovalori reali*

Dimostrazione. Segue dal fatto che la linearizzazione produce la matrice $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ che è simmetrica e quindi ha autovalori reali. \square

5 Sistemi Hamiltoniani

Consideriamo un sistema n-dimensionale del tipo

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \quad (5.1)$$

Diciamo che la quantità $I(x)$ è una quantità *invariante* lungo il flusso del sistema dinamico se vale

$$0 = \frac{d}{dt}I(x) = \sum \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla I \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla I \cdot f \quad (5.2)$$

Cioè vediamo che il gradiente della quantità invariante I è ovunque ortogonale al campo vettoriale f . In particolare se una quantità è costante lungo il moto (assumendo che non sia una costante ovunque) le traiettorie devono necessariamente giacere sugli insiemi di livello $I(x(t)) = \text{cost.}$ Quindi più quantità si conservano più è semplice determinare le soluzioni del sistema.

Esempio. Nel caso del sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = -dx(1-y) \\ \dot{y} = by(1-x) \end{cases}, \quad (5.3)$$

la quantità

$$I(x, y) = b(x - \log x) + d(y - \log y) \quad (5.4)$$

si conserva.

L'Hamiltoniana è una funzione che contiene in modo compatto le informazioni sulla dinamica di un sistema. Se denotiamo con q le coordinate libere di un sistema (che corrispondono ai suoi gradi di libertà) e con $p = mv$ i loro momenti coniugati, la dinamica del sistema è governata dalle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \quad (5.5)$$

dove

$$H(q, p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q), \quad (5.6)$$

è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale e corrisponde quindi all'energia totale. A causa delle equazioni (5.5) l'energia è una quantità conservata

$$\frac{d}{dt}H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (5.7)$$

Possiamo descrivere il sistema in maniera più compatta introducendo le *parentesi di Poisson*

$$\{F, G\} = \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla G = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (5.8)$$

dove abbiamo introdotto la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

dove I è la matrice identità $n \times n$. Se denotiamo $z = (q, p)^T$ allora le equazioni di Hamilton assumono la forma

$$\dot{z} = \{z, H\} = J \nabla H \quad (5.10)$$

Notiamo che siccome la matrice J è non degenere, i punti di equilibrio, corrispondenti a $\dot{z} = 0$, sono dati dai punti critici dell'Hamiltoniana $\nabla H = 0$. La stabilità all'equilibrio può essere studiata dalla matrice Hessiana di H .

In particolare supponiamo che H sia indipendente dal tempo. Allora

$$\frac{d}{dt} H = \{H, H\} = \nabla H^T \cdot J \cdot \nabla H = 0 \quad (5.11)$$

perché J è una matrice antisimmetrica. Abbiamo quindi dimostrato il

Lemma 5.12. *Se l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo, l'energia si conserva lungo le traiettorie $H(q(t), p(t)) = E$.*

Consideriamo un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, denotiamo con φ_t il flusso. Se D_0 indica un dominio di \mathbb{R}^n , al tempo t $D_t = \varphi_t(D_0)$. Denotiamo con $\text{vol}(D_t)$ il suo volume.

Lemma 5.13.

$$\frac{d}{dt} \text{vol} D_t|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla f dx \quad (5.14)$$

Dimostrazione. Usando lo Jacobiano della trasformazione

$$\text{vol} D_t = \int_{D_t} dx = \int_{D_0} \det \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} dx \quad (5.15)$$

Espandendo in serie di Taylor $\varphi_t(x) = x + f(x)t + \mathcal{O}(t^2)$ e quindi

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} = id + \frac{\partial f}{\partial x} t + \mathcal{O}(t^2) \quad (5.16)$$

Allora²

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right) = \det \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x} t \right) + \mathcal{O}(t^2) = 1 + \text{Tr} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) t + \mathcal{O}(t^2) \quad (5.17)$$

Quindi

$$\text{vol} D_t = \text{vol} D_0 + \int_{D_0} t \nabla \cdot f dx + \mathcal{O}(t^2) \quad (5.18)$$

da cui segue l'enunciato. □

Una conseguenza è

Teorema 5.19. *(Liouville) Supponiamo $\nabla \cdot f = 0$. Allora per ogni D_0 , $\text{vol} D_t = \text{vol} D_0$*

In particolare abbiamo

²Usiamo $\det(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \text{Tr} A + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Intuitivamente segue da $\det(1 + A\varepsilon) = \prod_i (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_i \lambda_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Teorema 5.20. *Se H è C^2 allora il suo flusso preserva il volume nello spazio delle fasi.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\nabla \cdot f = 0$ con $f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$. Da un calcolo diretto

$$\nabla \cdot f = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (5.21)$$

□

6 Dinamica di Poisson

Consideriamo M una varietà liscia d -dimensionale, dove d non è necessariamente pari. Introduciamo l'Hamiltoniana generalizzata $H : M \rightarrow \mathbb{R}$. Un sistema dinamico di Poisson è definito da

$$\dot{z} = \{z, H\} \quad (6.1)$$

dove la parentesi di Poisson $\{ , \}$ sono definita da

Definizione 6.2. *Le parentesi di Poisson $\{ , \}$ è un'operazione bilineari su funzioni in $C^2(M, \mathbb{R})$ tale che date $F, G, H \in C^2(M, \mathbb{R})$ valgono*

- *antisimmetria:* $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- *bilinearità:* $\{F + G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}$
- *derivazione:* $\{FH, G\} = F\{H, G\} + H\{F, G\}$
- *Jacobi:* $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

Le parentesi di Poisson introdotte nel contesto dei sistemi hamiltoniani soddisfano questo proprietà.

Lemma 6.3. *Sia $\{ , \}$ una parentesi di Poisson su $C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Allora esiste una matrice antisimmetrica $J(z)$ tale che*

$$\{F, G\} = \nabla F^T J(z) \nabla G \quad (6.4)$$

Dimostrazione. Sketch. La bilinearità implica che dipende da F e G un modo bilineare. Siccome è una derivazione agisce come una derivata prima su ciascun argomento. Per garantire l'antisimmetria $J(z)$ deve quindi essere una matrice antisimmetrica. □

Notiamo che non vale il viceversa: data una $J(z)$ antisimmetrica arbitraria, $\nabla F^T J(z) \nabla G$ in generale non soddisfa l'identità di Jacobi.

Dal lemma segue che le equazioni del moto di un sistema dinamico di Poisson hanno la forma

$$\dot{z} = \{z, H\} = J \nabla H \quad (6.5)$$

Inoltre se F è una funzione solo di z

$$\frac{dF}{dt} = DF \dot{z} = \nabla F^T J \nabla H = \{F, H\} \quad (6.6)$$

Inoltre segue dall'identità di Jacobi che

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \{\{F, G\}, H\} = \{F, \dot{G}\} + \{\dot{F}, G\} \quad (6.7)$$

I sistemi di Poisson autonomi sono sempre conservativi

$$\frac{d}{dt} H = \{H, H\} = 0 \quad (6.8)$$

Esempio 6.9. *Un sistema dinamico di Poisson è dato dalle Equazioni di Eulero per precessioni di inerzia. Se $H = \sum_i \frac{1}{2} \omega_i^2 J_i = \sum_i \frac{L_i^2}{2J_i}$ con $\dot{L}_i = J_i \dot{\omega}_i$ possiamo scrivere le equazioni di Eulero come*

$$\dot{L} = J \nabla H \quad (6.10)$$

con

$$\begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

7 Il teorema del ritorno

Al flusso φ^t associamo un sistema dinamico discreto nel modo seguente: fissiamo $T > 0$ e definiamo $g := \varphi^T$. Allora il sistema dinamico discreto $\{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$ è definito dall'iterazione di g . In particolare $\varphi^{kT}(x) = g^k(x)$ e l'evoluzione del sistema discreto al tempo k coincide con l'evoluzione del sistema continuo al tempo kT . Se il tempo T è piccolo possiamo sperare di controllare l'evoluzione del sistema per $t \in [kT, (k+1)T]$ perchè

$$|\varphi^t(x) - g^k(x)| \leq \max_{s \in [0, T]} |\varphi^s(g^k(x)) - g^k(x)| \quad (7.1)$$

dove il membro di destra è piccolo per $T \rightarrow 0$.

Abbiamo il

Teorema 7.2. *Sia g biunivoca, misurabile e che conserva il volume, e tale che $D \subset \mathbb{R}^n$ è invariante ($g(D) = D$). Allora per ogni insieme misurabile A in D quasi tutti i punti di A tornano infinite volte in A . Quindi se*

$$B := \{x \in A \mid \exists \{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ divergente, tale che } g^{k_j}(x) \in A \forall j \in \mathbb{N}\} \quad (7.3)$$

allora $\nu(A) = \nu(B)$. Il volume, o misura di Liouville, è definito da $\nu(A) = \int_A dx$

Dimostrazione. Il punto $x \in A$ è un punto ricorrente in A se $g^k(x) \in A$ per qualche $k > 0$. Denotiamo con N l'insieme dei punto non ricorrenti

$$N = \{x \in A \mid g^k(x) \notin A \forall k \geq 1\} \quad (7.4)$$

In particolare se $x \in N$, $g^k(x) \notin N \subset A$ perchè $N \subset A$ (con $k \geq 1$). Quindi $N \cap g^k(N) = \emptyset$. Fissiamo $k_2 > k_1 \geq 1$. Abbiamo

$$g^{k_1}(N) \cap g^{k_2}(N) = g^{k_1} \left(N \cap g^{k_2 - k_1}(N) \right) = \emptyset \quad (7.5)$$

Allora tutti gli insiemi $g^k(N)$ con $k \in \mathbb{N}$ sono disgiunti, e siggome g conserva il volume, hanno tutti volume $\nu(N)$. Siccome sono tutti contenuti in D , si ha $\forall k > 0$, che

$$\nu(D) \geq \sum_{l=0}^{k-1} \nu(g^l(N)) = k\nu(N) \quad (7.6)$$

Siccome $\nu(D) < +\infty$, ne segue che $\nu(N) = 0$.

Consideriamo adesso l'insieme dei punti no ricorrenti infinite volte

$$N_\infty = \{x \in A \mid \exists k > 0 \text{ per cui } g^l(x) \notin A \text{ per ogni } l \geq k\} \quad (7.7)$$

Vediamo che

$$\begin{aligned} N_\infty &\subset \{x \in A \mid \exists k > 0 \text{ per cui } g^{kj}(x) \notin A \text{ per ogni } j \geq 1\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in A \mid (g^k)^j(x) \notin A \forall j \geq 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \end{aligned} \quad (7.8)$$

(segue dalla definizione di N_k , punti non ricorrenti per g^k).

Siccome anche g^k è biunivoca e misurabile e lascia D invariato, quanto dimostrato prima vale anche per N_k e quindi $\nu(N_k) = 0$ per ogni $k \geq 1$. Ne segue che $\nu(N_\infty) = 0$.

Siccome B è l'insieme dei punti ricorrenti infinite volte e N_∞ è l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte, $B = A \setminus N_\infty$. Ne segue che $\nu(B) = \nu(A)$. \square

Abbiamo il corollario

Corollario 7.9. *Per $\dot{x} = f(x)$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato e invariante tale che φ_t conserva il volume. Allora*

1. *Per ogni insieme misurabile A in D , l'insieme dei punti "vaganti" di A*

$$V_A := \{x \in A \mid \exists T > 0 \text{ tale che } \varphi^t(x) \notin A \text{ per ogni } t \geq T\} \quad (7.10)$$

ha misura nulla.

2. *Per ogni $\epsilon > 0$, l'insieme $B_\epsilon \subset D$ dei dati iniziali x tali che $\varphi^t(x)$ ritorna infinite volte a distanza non superiore ad ϵ da x ha misura piena: $\nu(B_\epsilon) = \nu(D)$.*

Dimostrazione. 1. L'insieme V_A è contenuto in

$$\bar{V}_A := \{x \in A \mid \exists k > 0 \text{ per cui } \varphi_{(x)}^j \notin A \text{ per ogni intero } j \geq k\} \quad (7.11)$$

dove \overline{V}_A è l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte in A per l'applicazione $g = \varphi^1$. Siccome $g = \varphi^1$ soddisfa le ipotesi del teorema precedente, allora $\nu(\overline{V}_A) = 0$ e quindi $\nu(V_A) = 0$.

2. Siccome D è limitato, può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio $\epsilon/2$. Allora basta applicare il punto 1) a ciascuno di esse.

□

8 Cenni alla teoria ergodica

Applichiamo questi risultati al flusso φ_H^t ottenuto dal sistema hamiltoniano $\dot{x} = J\nabla X(x)$ con $D_E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) \leq E\}$ limitati (sottolivelli di energia). La conservazione dell'energia implica che D_E sono insiemi invarianti sotto φ_H^t e quindi possiamo applicare il teorema del ritorno.

Se l'energia del sistema è data, i moti possibili si svolgono sull'insieme

$$\Sigma_E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) = E\} \quad (8.1)$$

la superficie isoenergetica.

Vogliamo una misura invariante sulla superficie isoenergetica.

Teorema 8.2. *Sia $\Sigma_E \subset \mathbb{R}^{2N}$ una superficie isoenergetica compatta tale che $\nabla H(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Sigma_E$. Indichiamo con $d\sigma(\xi)$ l'elemento di superficie di Σ_E . Allora per $A \subset \Sigma_E$ misurabile, la misura*

$$\mu(A) = \int_A d\sigma \frac{1}{|\nabla H|} \quad (8.3)$$

è lasciata invariante dal flusso hamiltoniano: $\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A) \forall t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Non dimostriamo questo teorema in dettaglio, ma diamo un'idea del perché è vero. La misura di Liouville nello spazio delle fasi è invariante lungo il flusso hamiltoniano. Vogliamo quindi trovare la misura indotta sulla superficie Σ_E . Per fare questo consideriamo la superficie vicina $\Sigma_{E+\delta E}$ con $\delta E \ll E$. Notiamo che il flusso hamiltoniano è parallelo alle due superfici nella regione compresa. Consideriamo il volume di una regione compresa tra le due superfici $dV = d\sigma \delta\ell$. Qui $d\sigma$ è l'elemento di superficie mentre $\delta\ell$ rappresenta lo spessore tra le due superfici. Questo è dato da $\delta\ell = \delta E \frac{1}{|\nabla H|}$. Questo si perchè se $H(x) = E$ e $H(x + dx) = E + \delta E$, allora sviluppando si trova $\delta E = \nabla H \cdot dx$. Siccome il gradiente dell'Hamiltoniana è ortogonale alle superfici ad energia costante³ il prodotto proietta sulla componente di dx ortogonale, cioè $\delta\ell$, e abbiamo $\delta E = \nabla H \cdot dx = |\nabla H| \delta\ell$. Quindi la misura di una regione tra le due superfici

$$|A| = \int_A dV = \int_A d\sigma \delta\ell = \left(\int_A \frac{d\sigma}{|\nabla H|} \right) \delta E \quad (8.4)$$

e $\frac{d\sigma}{|\nabla H|}$ è la misura indotta sulle superfici ad energia costante.

□

Un misura invariante caratterizza comportamenti *tipici* del sistema, comportamenti che valgono per quasi tutti i punti. Un comportamento è tipico quando non dipende dal particolare istante temporale a cui osservo il sistema, da cui la necessità di essere invariante rispetto al flusso hamiltoniano.

³Ricordiamo $\nabla H \cdot f = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0$.

Esempio 8.5. Consideriamo l'oscillatore armonico di massa m e costante elastica k , di hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \quad (8.6)$$

Allora per $E > 0$ la superficie $\Sigma_E = \left\{ (q, p) : \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \right\}$ è un'ellisse, con $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ e $b = \sqrt{2mE}$. Parametizziamo i punti di Σ_E con coordinate angolari, $\xi \in \Sigma_E \rightarrow \xi = \xi(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$. Quindi l'elemento di superficie è

$$d\sigma(\theta) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \quad (8.7)$$

Calcoliamo $|\nabla H| = \sqrt{\nabla H \cdot \nabla H} = 2E \sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}$. Quindi

$$\frac{d\sigma}{|\nabla H|} = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}{2E \sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}} d\theta = \frac{d\theta}{\omega} \quad (8.8)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La misura μ appena introdotta è una misura limitata, che assegna un valore finito a tutta la superficie Σ_E , $\Omega(E) = \int_{\Sigma_E} d\sigma/|\nabla H|$. La misura normalizzata $\mu_E = \frac{d\sigma}{\Omega_E |\nabla H|}$, viene detta misura microcanonica: è una misura di probabilità (perchè normalizzata ad 1) che assegna una densità di probabilità uniforme alle superfici ad energia fissata.

Consideriamo adesso la situazione in cui un gas di particelle si trovi in una scatola. Inizialmente la scatola Q è divisa in due parti,

$$\begin{aligned} Q_- &= \{(x, y, z) : -L \leq x \leq 0, |y| \leq L, |z| \leq L\} \\ Q_+ &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, |y| \leq L, |z| \leq L\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

con $Q = Q_- \cup Q_+ = [-L, L]^3$. Il gas si trova tutto nella parte Q_- . Quando la divisione tra le due parti viene rimossa, le particelle sono libere di muoversi in tutta la scatola finchè raggiungono l'equilibrio. Secondo il teorema di ricorrenza, dopo un certo tempo il sistema deve ritornare nella condizione iniziale. Sembra quindi che abbiamo un paradosso.

Boltzmann per risolvere questo problema ha formulato l'ipotesi ergodica che (in una delle sue formulazioni) possiamo enunciare come: il sistema spende in una regione $W \subset \Sigma_E$ dello spazio delle fasi un tempo proporzionale a $\mu(W)$. In altre parole il tempo di ricorrenza è inversamente proporzionale a $\mu(W)$. Il tempo di ricorrenza opportunamente normalizzato è $\frac{\mu(\Sigma_E)}{\mu(W)}$.

Assumiamo che le particelle siano libere (potenziale zero in Q e infinito al bordo). Allora lo spazio delle fasi accessibile al sistema è

$$\Sigma_E = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{6N} : q \in Q^N, p^2 = 2mE\} = Q^N \times S_E \quad (8.10)$$

con S_E la sfera in \mathbb{R}^{3N} con raggio $\sqrt{2mE}$.

Siccome ∇H è costante su Σ_E la misura microcanonica è proporzionale al prodotto del volume di Q^N e dell'area di S_E . Stimiamo il volume di $\Omega_k \subset \Sigma_E$ delle configurazioni con k particelle in Q_- e

$N - k$ in Q_+

$$\begin{aligned}
|\Omega_k| &= |S_E| \binom{N}{k} \int_{Q_-} dq_1 \int_{Q_-} dq_2 \cdots \int_{Q_-} dq_k \int_{Q_+} dq_{k+1} \cdots \int_{Q_+} dq_N \\
&= |S_E| \frac{N!}{k!(N-k)!} (2L)^N (2L)^N \left(\frac{2L}{2}\right)^N = |S_E| \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{(2L)^{3N}}{2^N}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

dove $\int_{Q_-} dx dy dz = (2L)(2L)L$.

Siccome le particelle sono libere, il volume dello spazio delle fasi corrispondente a N particelle in Q è $|S_E|(2L)^{3N}$. Quindi

$$\frac{\mu(W)}{\mu(\Sigma_E)} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{1}{2^N} := R(k) \tag{8.12}$$

Supponiamo che $k = \alpha N$, con $\alpha \in [0, 1]$. Ricordiamo Stirling $n! \sim n^n e^{-n}$. Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log R(\alpha N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{N^N e^{-N+\alpha N+(1-\alpha)N}}{(\alpha N)^{\alpha N} ((1-\alpha)N)^{(1-\alpha)N} 2^N} \\
&= \log 2 - \alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha) =: I(\alpha)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Quindi $R(\alpha N) \sim e^{-NI(\alpha)}$. Allora quando tutte le particelle si trovano in Q_+ o Q_- , $\alpha = 0, 1$. In particolare $I(1) = \log 2$ e quindi lo stato in cui tutte le particelle sono in Q_- occupa un volume 2^{-N} . Il tempo di ricorrenza è pertanto 2^N . Se abbiamo $N = 10^{23}$ (numero di Avogadro) il tempo di ricorrenza è enorme, $2^{10^{23}}$. Notiamo anche che il sistema spende quasi tutto il suo tempo nello stato con $\alpha = \frac{1}{2}$.

9 Coniugazione topologica

Un problema importante nella teoria dei sistemi dinamici è stabilire quando sistemi che sembrano differenti in realtà descrivono lo stesso processo naturale. Ad esempio due sistemi dinamici potrebbero essere ottenuti l'uno dall'altro attraverso una trasformazione di coordinate. Sapere quando due sistemi dinamici sono equivalenti ci porterebbe ad una classificazione dei sistemi dinamici. Dobbiamo però specificare in che senso consideriamo due sistemi equivalenti.

Cominciamo con la definizione di equivalenza topologica

Definizione 9.1. *Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$ sono topologicamente coniugati se esiste un omeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tale che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\varphi_t} & A \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
B & \xrightarrow{\psi_t} & B
\end{array} \tag{9.2}$$

commuta, cioè $h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$ per ogni $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}$.

Se due sistemi sono coniugati topologicamente, allora c'è una corrispondenza tra le traiettorie. As esempio, se x^* è un punto fisso di φ , $\varphi_t(x^*) = x^*$, allora $\psi_t(h(x^*)) = h(\varphi_t(x^*)) = h(x^*)$ e quindi $h(x^*)$ è un punto fisso di ψ . Ragionamenti analoghi valgono per tutte le altre orbite.

Notiamo che la definizione di coniugazione topologica implica che i due sistemi dinamici hanno la stessa parametrizzazione temporale. Una condizione più debole richiede solo che la direzione del tempo sia la stessa:

Definizione 9.3. Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$ sono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo $h : A \rightarrow B$ e una mappa $\tau : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente in t , tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_{\tau(x,t)}} & A \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\psi_t} & B \end{array} \quad (9.4)$$

commuta, cioè $h(\varphi_{\tau(x,t)}(x)) = \psi_t(h(x))$ per ogni $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}$.

Nel caso di sistemi dinamici unidimensionali a tempo continuo abbiamo il seguente risultato

Teorema 9.5. Due flussi φ e ψ in \mathbb{R} sono topologicamente equivalenti se e solo se i loro punti fissi, ordinati lungo la linea reale, possono essere messi in corrispondenza uno a uno, in modo che punti fissi corrispondenti abbiano siano dello stesso tipo topologico (pozzo, sorgente, semistabile)

Dimostrazione. Se abbiamo un omeomorfismo h , allora per definizione ad ogni punto fisso di φ_t corrisponde un punto fisso di ψ_t e viceversa. Inoltre siccome h è monotona, la corrispondenza tra i punti di equilibrio è ordinata.

Viceversa, supponiamo che φ e ψ abbiano i punti di equilibrio in corrispondenza. Costruiamo h esplicitamente per dimostrare l'equivalenza (infatti dimostreremo che i sistemi sono tra loro coniugati). Supponiamo di avere un numero finito di punti di equilibrio (il caso generale è lasciato per esercizio). Ordiniamo i punti di equilibrio di φ come $x_1^* < \dots < x_n^*$ e di ψ come $y_1^* < \dots < y_n^*$ e poniamo $h(x_i^*) = y_i^*$ come parte della definizione di h .

Prendiamo ora una collezione di punti α_i e β_i come $\alpha_0 < x_1^* < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n^* < \alpha_n$ e similmente per β_i e y_i^* . Allora definiamo $h(\alpha_i) = \beta_i$. Useremo questi dati per definire h su tutti gli intervalli (x_i^*, x_{i+1}^*) . Prendiamo un $x_0 \in (x_i^*, x_{i+1}^*)$. Il flusso nell'intervallo è monotono, crescente o decrescente, e quindi c'è un unico tempo t_0 tale che $\varphi_{t_0}(x_0) = \alpha_1$. Allora per ogni x_0 definiamo $h(x_0) = \psi_{-t_0}(\beta_i) =: y_0$. Segue dalle proprietà di ψ che la funzione così definita è un omeomorfismo. Ragionamenti analoghi valgono per gli intervalli $(-\infty, x_1^*)$ e (x_n^*, ∞) .

Inoltre siccome $\varphi_{t_0-t}(\varphi_t)(x_0) = \alpha_1$ abbiamo che

$$h(\varphi_t(x_0)) = \psi_{-(t_0-t)}(\beta_i) = \psi_t(\psi_{-t_0}(\beta_i)) = \psi_t(h(x_0)) \quad (9.6)$$

che stabilisce la coniugazione topologica. □

A seconda delle situazioni possiamo essere interessati a proprietà più forti.

Definizione 9.7. Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$ si dicono diffeomorfi se esiste un diffeomorfismo h tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_t} & A \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\psi_t} & B \end{array} \quad (9.8)$$

commuta.

In modo simile possiamo definire una nozione di equivalenza in senso liscio.

Teorema 9.9. (*Coniugazione lineare*). Consideriamo i flussi φ_t e ψ_t di due sistemi lineari $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By$. Allora φ_t e ψ_t sono diffeomorfi se e solo se la matrice A è simile alla matrice B .

Dimostrazione. Assumiamo che A e B siano simili, cioè esiste H non singolare tale che $HA = BH$. Poniamo $h(x) = Hx$. È un diffeomorfismo, e inoltre

$$h(\varphi_t(x)) = H e^{tA} x = e^{tH A H^{-1}} H x = e^{tB} h(x) = \psi_t(h(x)) \quad (9.10)$$

e quindi i due flussi sono diffeomorfi.

Supponiamo ora di avere un diffeomorfismo g tale che $g(\varphi_t)(x) = \psi_t(g(x))$. L'origine è un punto fisso di φ . Poniamo $g(0) = c$. Allora $g(\varphi_t(0)) = c = \psi_t(c)$ e quindi c è un punto fisso di ψ . Definiamo $h(x) = g(x) - c$. Abbiamo $h(0) = 0$. Inoltre

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(g(x)) - c = \psi_t(h(x) + c) - c = \psi_t(h(x)). \quad (9.11)$$

Per finire definiamo la matrice $H = Dh(0)$. Se deriviamo l'equazione (9.11) rispetto a x e poi poniamo $x = 0$, troviamo $H e^{tA} = e^{tB} H$. Se deriviamo quest'ultima rispetto a t e poi poniamo $t = 0$ troviamo $HA = BH$. \square

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato, di fondamentale importanza. Questo risultato rende precisa l'intuizione che il comportamento di un sistema non-lineare vicino ad un punto iperbolico è equivalente a quello della sua linearizzazione.

Teorema 9.12. (*Hartman-Grobman*). Sia x^* un punto di equilibrio iperbolico di un campo vettoriale C^1 $f(x)$, con flusso $\varphi_t(x)$. Allora esiste un intorno N di x^* tale che φ è topologicamente coniugato alla sua linearizzazione in N .

Sketch. Prendiamo il sistema dinamico nella forma

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (9.13)$$

dove la matrice A è iperbolica e la funzione g è almeno C^1 e comunque di ordine superiore al primo termine. Il flusso dell'equazione lineare è $\psi_t(x) = e^{tA}x$. Siccome il teorema è locale, modifichiamo l'equazione differenziale in

$$\dot{x} = Ax + \tilde{g}(x) \quad (9.14)$$

dove $\tilde{g}(x)$ coincide con $g(x)$ in un intorno N di 0 , ma è identicamente nulla fuori da un intorno \tilde{N} , con $N \subset \tilde{N}$. Chiamiamo φ_t il flusso per questo sistema. Fuori da \tilde{N} φ_t è dato dal sistema lineare. Vogliamo dimostrare che esiste un omeomorfismo h

$$\psi_t(h(x)) = h(\varphi_t) \quad (9.15)$$

e quindi che

$$h(x) = e^{-tA} \circ h \circ \varphi_t(x) \quad (9.16)$$

Supponiamo di avere H un omeomorfismo che soddisfa questa relazione per $t = 1$

$$H_1(x) = e^{-A} H_1(\varphi_1(x)) \quad (9.17)$$

e supponiamo di poter dimostrare che H_1 è unico.

Poniamo $H_t(x) = e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x)$. Allora H_t deve coincidere con H_1

$$\begin{aligned} e^{-A} \circ H_t \circ \varphi_t(x) &= e^{-A} \circ e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t \circ \varphi_1(x) \\ &= e^{-tA} \circ e^{-A} \circ H_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_t(x) \\ &= e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x) \\ &= H_t \end{aligned} \quad (9.18)$$

Quindi H_t soddisfa la stessa relazione di H_1 e quindi per l'unicità $H_t = H_1$. Quindi $H_1 = e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x)$ e H_1 è l'omeomorfismo cercato anche per $t \neq 1$. Il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\varphi_t} & x(t) & \xrightarrow{\varphi_{1-t}} & x(1) \\ \downarrow H_1 & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_1 \\ y & \xrightarrow{e^{tA}} & y(t) & \xrightarrow{e^{(1-t)A}} & y(1) \end{array} \quad (9.19)$$

commuta. Allora il problema è quello di trovare H_1 . Poniamo $H_1(0)(x) = x$ e definiamo

$$H_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ H_1^{(i)} \circ \varphi_1(x) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.20)$$

La parte tecnica del teorema è dimostrare che questa iterazione converge e che H_1 è unico. □

10 Mappa di Poincaré

Ad un sistema dinamico possiamo associare un sistema dinamico discreto in maniera naturale. Se consideriamo un flusso in \mathbb{R}^n , definiamo una sezione S del flusso come una superficie a co-dimensione 1 tale che il vettore tangente non è mai tangente ad S :

$$f(x) \cdot \hat{n}_x = 0 \quad (10.1)$$

se \hat{n}_x è il versore normale ad S nel punto x . Una *mappa di Poincaré* per una sezione S si ottiene partendo da un punto $x \in S$ e seguendo il flusso $\varphi_t(x)$ fino al suo ritorno in S . Chiamiamo

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \varphi_t(x) \in S\} \quad (10.2)$$

il *tempo del primo ritorno* se $\varphi_t(x) \notin S$ per ogni $t \in (0, \tau(x))$ e $\varphi_{\tau(x)}(x) \in S$. Allora definiamo la mappa di Poincaré $F : S \rightarrow S$ come

$$F(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \quad (10.3)$$

Notiamo che in generale $\tau(x)$ può non esistere per tutti i $x \in S$. Chiamiamo S una sezione globale se l'orbita di ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ eventualmente passa attraverso S e vi ritorna. Per una sezione globale la mappa di Poincaré è definita per ogni $x \in S$.

La mappa di Poincaré definisce un sistema dinamico discreto, che può essere usato per studiare alcune proprietà del flusso $\varphi_t(x)$. Ad esempio punti fissi della mappa di Poincaré corrispondono a orbite periodiche.

Se S e \tilde{S} sono due sezioni globali, allora le corrispondenti mappe di Poincaré sono coniugate, la coniugazione essendo determinata da l'omeomorfismo $h : S \rightarrow \tilde{S}$ dato da $h(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$. Questo è definito attraverso $\tau(x)$, il tempo che il flusso impiega per portare un punto di S in un punto di \tilde{S} .

Suspension flow. Un sistema dinamico a tempo continuo definisce un sistema dinamico a tempo discreto attraverso la mappa di Poincaré, almeno localmente. È naturale chiedersi se valga, e in che senso, il viceversa.

Consideriamo un sistema dinamico a tempo discreto, una mappa $f : X \rightarrow X$. Sia data una funzione $r : X \rightarrow \mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme

$$Z = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq r(x)\} \quad (10.4)$$

Introduciamo una relazione di equivalenza \sim che identifica i punti $(x, r(x))$ con $(f(x), 0)$. Allora introduciamo lo spazio delle fasi esteso

$$\hat{X}_r = Z / \sim \quad (10.5)$$

Allora introduciamo il flusso di sospensione (suspension flow) come $\varphi_t : Y \rightarrow Y$ con funzione altezza r , via

$$\varphi_t(x, s) = (x(t), t + s) \quad \text{per } s + t \in [0, r(x)] \quad (10.6)$$

Se la mappa f non ha inversa, allora abbiamo solamente un semi-flusso.

Intuitivamente partiamo dal punto $(x, 0)$ ed seguiamo un'evoluzione "verticale" fino al punto $(x, r(x))$. Questo punto è identificato con $(f(x), 0)$. Da questo punto seguiamo ancora un'evoluzione verticale fino a $(f(x), r(f(x)))$, e così via.

11 Varietà invarianti

Abbiamo visto che per sistemi lineari gli spazi E^s e E^u sono invarianti durante la dinamica. Adesso vedremo la generalizzazione di questo fatto ai sistemi non-lineari iperbolici.

Sia Λ un insieme invariante. Allora abbiamo gli insiemi stabile e instabile

$$W^s(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi_t(x) \rightarrow \Lambda, \text{ per } t \rightarrow +\infty\} \quad (11.1)$$

$$W^u(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi_t(x) \rightarrow \Lambda, \text{ per } t \rightarrow -\infty\} \quad (11.2)$$

(o anche bacino di attrazione e bacino di repulsione). In particolare gli insiemi $W^s(\Lambda)$ e $W^u(\Lambda)$ sono anche insiemi invarianti. Infatti se prendiamo $z \in W^s(\Lambda)$, per definizione $\varphi_s(z)$ ha la proprietà che per ogni $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(\varphi_s(z)) = \varphi_{s+t}(z) \rightarrow \Lambda$ per $t \rightarrow +\infty$. Similmente per $W^u(\Lambda)$.

Esempio 11.3. Consideriamo il sistema dinamico non-lineare

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}\tag{11.4}$$

Lo linearizziamo come

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y\end{aligned}\tag{11.5}$$

e quindi vediamo che gli autovalori sono ± 1 . Quindi il punto critico è un punto sella e il sottospazio stabile E^s coincide con l'asse delle x mentre il sottospazio instabile E^u coincide con l'asse delle y .

Adesso troviamo W^s e W^u nel sistema non-lineare. W^s è ancora l'asse y : se $x_0 = 0$ allora l'equazione $\dot{x} = -x$ è risolta da $x(t) = x_0 e^{-t} = 0$ e $\dot{y} = y + x^2 = y$ da $y(t) = y_0 e^t \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$.

Cerchiamo W^s . Supponiamo di prendere dei dati iniziali $(x_0, y_0) \in W^s$. Allora $\dot{x} = -x$ implica $x(t) = x_0 e^{-t}$ e $\dot{y} = y + x^2 = y + x_0^2 e^{-2t}$. Abbiamo

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}y) = e^{-t}\dot{y} - ye^{-t} = e^{-t}(\dot{y} - y) = x_0^2 e^{-3t}\tag{11.6}$$

Quindi integrando

$$e^{-t}y(t) = y_0 + \int_0^t x_0^2 e^{-3\tau} d\tau = y_0 + \frac{x_0^2}{3}(1 - e^{-3t}) = \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) - \frac{x_0^2}{3} e^{-3t}\tag{11.7}$$

Allora vediamo che prendendo

$$W^s = \{(x, y) | y = -\frac{x^2}{3}\}\tag{11.8}$$

abbiamo $y_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$ per il dato iniziale e la soluzione

$$(x, y) = \left(x_0 e^{-t}, -\frac{x_0^2}{3} e^{-2t}\right)\tag{11.9}$$

rimane su W^s e tende a $(0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$. Quindi è la varietà stabile. Notiamo che E^s è tangente a W^s nell'origine.

Siamo interessati in generale a capire come sono fatti questi spazi. Per un sistema lineare iperbolico, gli insiemi stabili e instabili dell'origine sono proprio E^s e E^u . Vedremo che nel caso non lineare per punti fissi iperbolici E^s e E^u sono l'approssimazione lineare di W^s e W^u .

Definizione 11.10. Un'orbita Γ si dice eteroclina se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti ad un insieme invariante B e asintoticamente indietro ad un insieme invariante A , cioè $\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(B)$.

Ad esempio se siamo nel piano, un esempio di orbita eteroclina è un'orbita che connette due punti sella.

Definizione 11.11. Un'orbita Γ si dice omoclina se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti e indietro allo stesso insieme invariante A , cioè $\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(A)$.

Esempio 11.12. Orbite omocline sono tipiche dei sistemi hamiltoniani. Prendiamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + x\end{aligned}\tag{11.13}$$

L'hamiltoniana è $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$. I punti di equilibrio sono $(0, 0)$, $(+1, 0)$ e $(-1, 0)$ per cui $H = \frac{1}{4}, 0, 0$. Linearizzando si trova

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{11.14}$$

Allora $(0, 0)$ ha autovalori ± 1 e quindi è un punto sella. Invece $(\pm 1, 0)$ ha autovalori $\pm \sqrt{2}i$ e quindi sono due centri. Le curve di livello per H si trovano ponendo $H = \text{cost}$. (ricordiamo che le orbite giacciono sulle curve $H = \text{cost}$). Le orbite che tendono a $(0, 0)$ per $t \rightarrow \pm\infty$ sono le omocline.

Abbiamo visto nell'esempio che gli insiemi invarianti sono di fatto varietà differenziabili. Questo è vero più in generale sotto determinate condizioni. Supponiamo che il campo vettoriale f sia C^1 e sia x^* un punto di equilibrio iperbolico. Denotiamo la sua linearizzazione con $Df(x^*) = A$. Possiamo cambiare variabile da x a $x + x^*$ per ottenere

$$\dot{x} = Ax + g(x)\tag{11.15}$$

dove $g(x) = f(x + x^*) - Ax$ e vale $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$. Vale il seguente

Teorema 11.16. (Teorema della varietà invariante locale). Sia A una matrice iperbolica, $g \in C^k(U)$, con $k \geq 1$, e U un intorno del punto fisso 0 . Inoltre supponiamo $g(x) = o(x)$ (di ordine x) per $x \rightarrow 0$. Denotiamo con E^s e E^u i sottospazi stabile e instabile di A . Allora c'è un intorno $\tilde{U} \subset U$ tale che l'insieme

$$W_{\text{loc}}^s(0) = \{x \in W^s(0) : \varphi_t(x) \in \tilde{U}, t \geq 0\}\tag{11.17}$$

è un grafico di Lipschitz tangente a E^s in 0 . Inoltre $W_{\text{loc}}^k(0)$ è una varietà differenziabile C^k .

Non dimostreremo questo teorema. A parole il teorema implica che esiste un intorno di un punto fisso iperbolico per il quale la varietà invariante locale W_{loc}^s ha la struttura di varietà differenziabile, tangente al punto fisso al sottospazio E^s , cioè $T_0 W_{\text{loc}}^s(0) = E^s$, e quindi in particolare della stessa dimensione.

Se consideriamo un punto di equilibrio iperbolico x^* , abbiamo visto che $W^s(x^*)$ è un insieme invariante. Ogni punto di $W^s(x^*)$ arriverà dopo un certo tempo in $W_{\text{loc}}^s(x^*)$. Quindi possiamo estendere la varietà invariante locale stabile seguendo il flusso all'indietro. In questo modo troviamo

l'insieme stabile globale (e similmente quello instabile)

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}(W_{\text{loc}}^s(x^*)) \quad (11.18)$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{+t}(W_{\text{loc}}^u(x^*)) \quad (11.19)$$

$$(11.20)$$

detti *varietà globale stabile e instabile*.

Si può dimostrare che se f è C^1 W^s e W^u sono *immersioni*, con $\dim W^s = \dim E^s$. (Ricordiamo che un'immersione è una mappa C^1 $g : M \rightarrow N$ tale che $\text{rank} Dg = \dim M$). Le varietà invarianti globali sono solamente varietà immerse, e non sottovarietà.

Approfondimenti

- Steven H. Strogatz , *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* Westview Press CRC Press (2018)
- Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* Springer (2003)
- Meiss *Differential Dynamical Systems*