Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2021/2022 - 14 giugno 2022
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Dimensione per applicazioni lineari.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ e delle loro basi.

$rg\, A = rg \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3 = rg\, f = \dim \operatorname{Im} f$

base di $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (o qualunque altra base di $\mathbb{R}^3$)

$\dim \ker f = 3 - rg\, f = 3 - 3 = 0$, non ha base

(c) **(2 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta vettoriale r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= -t \end{cases}$$

Il generico vettore di r è $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$, e la sua immagine tramite f è: $f\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - t \\ 2t + t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(r) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

e $\dim f(r) = 1$

(d) **(2 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

La matrice A dei coefficienti ha rango 3, quindi è invertibile, e per il Teorema di Cramer il SL è compatibile e ammette 1! soluzione.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III' - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

$2x_1 = 0$
$x_2 - x_3 = 0$
$2x_3 = 2$

l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 3 \\ 0 & 3 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)\left[(-1-x)^2 - 9\right] = (2-x) \cdot (x^2+2x+1-9)$$

$$= (2-x) \cdot (x^2+2x-8) = (2-x) \cdot (x-2) \cdot (x+4) = -(x-2)^2 (x+4)$$

$$\Rightarrow Sp(B) = \{2, -4\} \quad e \quad m_a(2) = 2, \quad m_a(-4) = 1$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$V_2 = \ker(B - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, una sua equazione è $y - z = 0$

$\Rightarrow$ base ortonormale di V: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$V_{-4} = \ker(B + 4I_3) = \ker \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, con eq. $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

base ortonormale di V_{-4}: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(I_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(I_d) = {}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(I_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano H e la retta s:

$$H:\ x-y+z=11 \qquad s:\ \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 5t \\ z &= 1+3t \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono paralleli.
Inoltri, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r parallela ad s e contenuta in H:

$$r \| s, \quad r \subset H.$$

Tale retta è unica?

La giacitura W_H ha equazione $x-y+z=0$; la giacitura W_s verifica $W_s = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right)$. Si ha: $H \parallel s \iff W_H \supseteq W_s \iff$ il vettore $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ soddisfa $x-y+z=0$; si ha: $2-5+3=0$, quindi sono $\parallel$.

Una retta $r \parallel s$ e $r \subseteq H$ deve avere la stessa giacitura di s e passare per un punto di H; ad esempio: $Q=(1,0,10) \in H$, quindi

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 5t \\ z = 10+3t \end{cases}$$

soddisfa le richieste.

In generale, OGNI retta $\parallel s$ e passante per un punto di H soddisfa le richieste, quindi sono infinite. Più precisamente: $H: \begin{cases} x = 11+a-b \\ y = a \\ z = b \end{cases}$

Generico punto di H: $Q=(11+a-b, a, b)$, $\quad r: \begin{cases} x = 11+a-b+2t \\ y = a+5t \\ z = b+3t \end{cases}$

Al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ troviamo tutte le rette r
$r \parallel s$, $r \subseteq H$.

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L parallelo al piano M di equazioni

$$M:\ \begin{cases} x &= 2-t+s \\ y &= -3+t-s \\ z &= s, \end{cases}$$

e passante per il punto $Q=(1,1,1)$.

$L \parallel M \iff W_L = W_M = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$; inoltre L deve passare per $Q=(1,1,1)$

Equazioni parametriche per L:

$$\begin{cases} x = 1-t+s \\ y = 1+t-s \\ z = 1+s \end{cases}$$

Equazione cartesiana:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{pmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova $\boxed{x+y=2}$