Esame di Analisi matematica I: esercizi
A.a. 2021-2022, sessione estiva, II appello
Corso prof. Cuccagna

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli al variare di $a > 0$ il ~~valore del limite~~ limite

$$L_a := \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x+2x^2+e^{ax^2}) - \int_0^x \frac{1+t+t^2}{1+\sqrt{t}+t}dt}{x^2 \cancel{\sin(x)}} = f(x)$$

$\leftarrow \sin(x)$ qui per errore

$$\int_0^x \frac{1+t+t^2}{1+\sqrt{t}+t}\,dt = \int_0^x \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}} \; \frac{1+t^{-1}+t^{-2}}{1+t^{-\frac{1}{2}}+t^{-1}}\,dt$$

$$= \int_0^x t\,(1+t^{-1}+t^{-2})\,(1-t^{-\frac{1}{2}}-\cancel{t^{-1}}+t^{-1}-t^{-\frac{3}{2}}+o(t^{-\frac{3}{2}}))$$

$$= \int_0^x t\,(1-t^{-\frac{1}{2}}+2t^{-1}+o(t^{-1}))\,dt = \frac{x^2}{2}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+o(x^{\frac{3}{2}})$$

$$\lg(1+x+2x^2+e^{ax^2}) = \lg(e^{ax^2}(1+xe^{-ax^2}+2x^2e^{-ax^2}+e^{-ax^2}))$$

$$= ax^2+\lg(1+xe^{-ax^2}+2x^2e^{-ax^2}+e^{-ax^2}) =$$

$$= ax^2+\lg(1+o(x^{-n})) \qquad \forall n\in N$$

$$= ax^2+o(x^{-n}) \qquad \forall n\in N$$

$$\text{Num} = \left(a-\frac{1}{2}\right)x^2-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+o(x^{\frac{3}{2}})$$

$$f(x) = \frac{\text{Num}}{x^2} = \left(a-\frac{1}{2}\right)+o(1) \xrightarrow{x\to+\infty} a-\frac{1}{2}$$

$$L_a = a-\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO N. 2. Risolvere la disuguaglianza $Im\left(\frac{1}{1+i(z^2-z+1)}\right) > 0$ tracciando sul piano l'insieme delle soluzioni.

$$Im\left(\frac{1-i(\bar z^2-\bar z+1)}{|1+i(z^2-z+1)|^2}\right) > 0 \iff$$

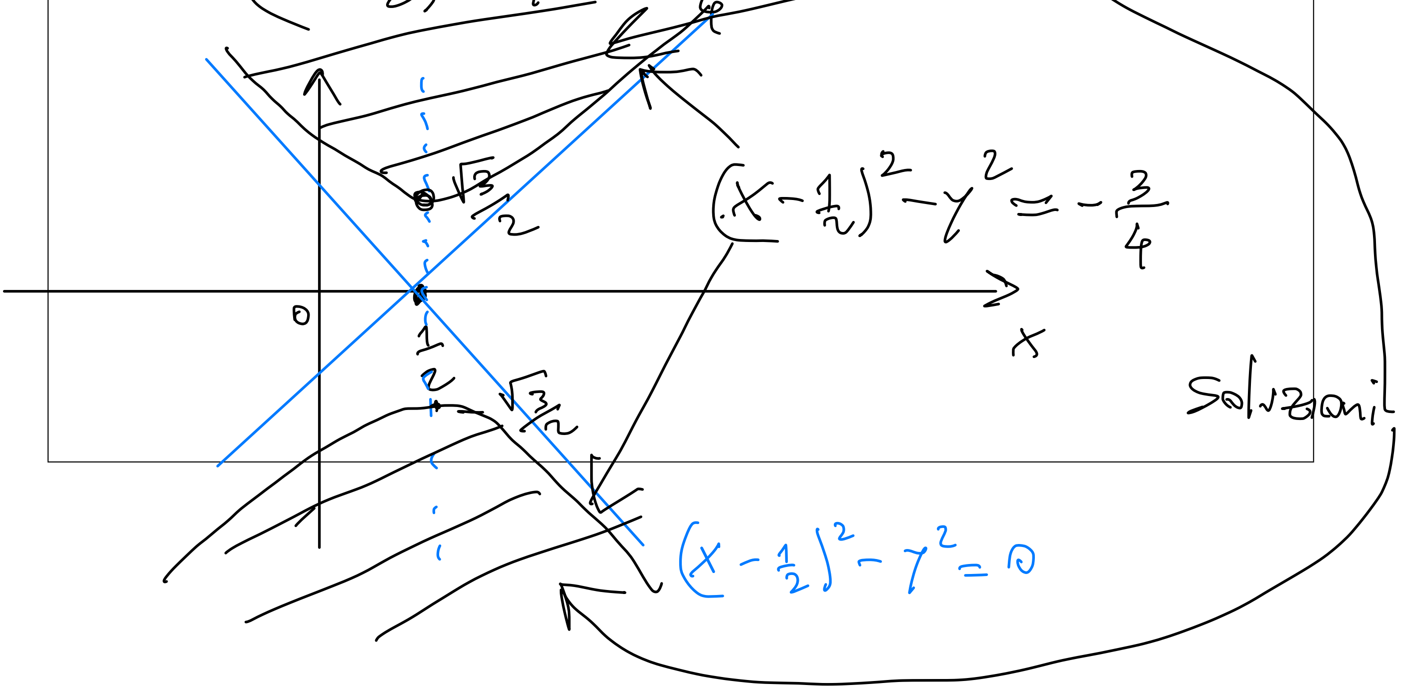
$$Im\left(\cancel{1}-i(\bar z^2-\bar z+1)\right) > 0 \iff$$

$$Im\left(i(x^2-y^2-\cancel{2ixy}-x+\cancel{iy}+1)\right) < 0 \iff$$

$$Im\left(i(x^2-y^2-x+1)\right) < 0 \iff$$

$$x^2-y^2-x+1<0 \iff x^2-2\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}-y^2+1-\tfrac{1}{4}<0$$

$$\iff \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-y^2<-\tfrac{3}{4}$$



COGNOME e NOME STAMPATELLO LEGGIBILE **N. Matricola** ____________

Si consideri

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3}\,dt & \text{se } x\ge 0\\ \displaystyle -\int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt & \text{se } x<0.\end{cases}$$

• si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$\lim_{t\to-\infty} e^{-\frac{1}{t^2}}=1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\frac{t}{1+t+t^2+t^3}=\frac{t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\qquad A=\frac{t}{1+t^2}\Big|_{t=-1}=-\frac{1}{2}$

$A+B=0\Rightarrow B=\frac{1}{2}\qquad -\frac{1}{2}(1+t^2)+\frac{1}{2}t(1+t)+C(1+t)=t\Rightarrow -\frac{1}{2}+C=0$

$C=\frac{1}{2}\Rightarrow$ per $x\ge 0$ $f(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,dt=$

• si calcoli $f'(x)$ dove é definito e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}+\frac{1}{2}\arctan x\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{\pi}{4}$. Per $x>0$ $f'(x)=\frac{x}{1+x+x^2+x^3}$

$f'_d(0)=0$, per $x<0$ $f'(x)=-e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f'_s(0)=0\Rightarrow f'(0)=0$

0 min assoluto

Per $x>0$ $f''(x)=\frac{(1+x+x^2+x^3)-x(1+2x+3x^2)}{(1+x+x^2+x^3)^2}=\frac{1-x^2-2x^3}{(1+x+x^2+x^3)^2}$

• si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

per $x\ge 0$ segno di $f''(x)=$ segno di $1-x^2-2x^3$. Esiste esattamente un $x_0>0$ t.c. $1-x_0^2-2x_0^3=0$, per $x\in(0,x_0)$ $f''(x)>0$ e per $x>x_0$ $f''(x)<0$. Per $x<0$, $f''(x)=-e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}>0$

Ovviamente $y=\frac{\pi}{4}$ è la retta asintotica per $x\to+\infty$

• si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico.

per $x<<-1$, $f(x)=-\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^2}}dt-\int_1^x\left(1-\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)dt$

$=-\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^2}}dt-(x-1)+\int_1^x\frac{1}{t^2}(1+o(1))\,dt=$

$=-x+A+o(1)$ per una qualche costante A.

Cioè esiste una retta asintotica della forma $y=-x+A$ per $x\to-\infty$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_x^{3x} e^{t^2}\, dt$:

(i) calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x)$;

$$f(x) = \int_x^{3x} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{t^{2j}}{j!} + o(t^{2n}) \right) dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)(j!)} \right]_x^{3x} + o(x^{2n+1}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{3^{2j+1}-1}{(2j+1)(j!)} x^{3j+1}}_{P_{3n+1}(x)} + o(\cancel{x}^{3n+1})$$

dove ho usato $e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + E_n(y)$ dove

$$E_n(y) = \frac{e^{c_n y}}{(n+1)!} y^{n+1} \qquad 0 < c_n y < y$$

(ii) approssimare $f(1)$ con un numero razionale ed un errore minore di $\frac{1}{100}$.

$$\left| f(1) - P_{3n+1}(1) \right| = \left| \int_1^3 E_n(t^2)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_1^3 \left| E_n(t^2) \right| dt = \int_1^3 \frac{e^{c_n t^2}}{(n+1)!} t^{2n+2}\, dt < e^3 \int_1^3 \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\, dt$$

$$< 3^3 \; \frac{3^{2n+3} - 1}{(n+1)!\,(2n+3)}.$$ Poi, ma la verità, servirebbe una calcolatrice