

Geometria 1

III appello d'esame

Anno accademico 2021-2022

21/6/2022

1) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita come

$$f(x, y) = (3x - y, -x + 3y).$$

- (a) Dimostrare che f è un endomorfismo lineare autoaggiunto di \mathbb{R}^2 , rispetto al prodotto scalare canonico, e scriverne la matrice rispetto alla base canonica.
- (b) Determinare nucleo, immagine e rango di f .
- (c) Verificare che f è un automorfismo e calcolare $f^{-1}(1, 1)$.
- (d) Determinare gli autovalori di f e una base ortonormale diagonalizzante.

2) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione

$$x + 2y - z = 0.$$

Determinare la dimensione di U , una sua base ortonormale e una base ortonormale di U^\perp .

3) Risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} y - \alpha z = 1 \\ x + 2z = 1 - \alpha \\ 2x + \alpha y = 0 \end{cases}$$

per ogni scelta del parametro reale α .

4) Si consideri la matrice complessa

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori di $t \in \mathbb{C}$, A_t è diagonalizzabile. Trovare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $A_2 = SDS^{-1}$.