Esercizio 1.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da
$f(x,y) = (3x - y, -x + 3y)$.

a) Ricordando che le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sono tutte e sole del tipo $L(A)$, dove A è una matrice reale 2×2, per dimostrare che f è lineare basta osservare che $f = L(A)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Infatti

$$f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A è anche la matrice di f rispetto alla base canonica.

Poichè la base canonica è ortonormale per il prodotto scalare canonico, essendo A simmetrica, segue che f è autoaggiunto.

b) Il nucleo di f è definito da

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, cioè è l'insieme delle

soluzioni del sistema lineare

omogeneo avente A come matrice

dei coefficienti. Riduciamo A a

gradini per trovare il suo rango:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è 2 dunque

$\dim \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = (0)$.

Per il teorema della dimensione,

si ottiene $\dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Il rango di f è uguale

anche questo a 2.

c) Abbiamo visto che f è un endomorfismo iniettivo e suriettivo, dunque è un automorfismo. Come tale ammette inverso f^{-1}, associato alla matrice A^{-1}. Si calcola facilmente che $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Quindi $f^{-1}(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

In alternativa, per calcolare $f^{-1}(1,1)$ si può risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}.$$

d) Essendo f autoaggiunto, ammette una base ortonormale di autovettori! Per trovarla, cerchiamo dapprima gli autovalori:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 - 1 =$$

$= x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. quindi

— ha gli autovalori 2 e 4.

Per trovare $Aut(2)$, considero

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$ quindi

$Aut(2)$ ha equazione $x - y = 0$

e una sua base è il vettore $(1,1) := v_1$.

Per ~~trovare~~ trovare $Aut(4)$, considero

$$A - 4E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0$$

è un'equazione di $Aut(4)$, e una base è il vettore $(1,-1) := v_2$.

v_1, v_2 sono ortogonali; basta normalizzarli per trovare la base cercata: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Esercizio 2

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ è il sottospazio di equazione
$x+2y-z=0$.
Essendo definito da un'unica equazione lineare, U ha dimensione 2.
Una soluzione generica della sua equazione è $(-2y+z, y, z)$, dove y e z sono parametri. Per trovare una base di U pongo dapprima $y=1, z=0$, e poi $y=0, z=1$.

Ottengo $u_1 = (-2, 1, 0)$
$u_2 = (1, 0, 1)$.

Applico il metodo di Gram-Schmidt per ortonormalizzare u_1, u_2.

- Normalizzo u_1: $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$

• $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 =$

$$(1,0,1) - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) =$$

$$= (1,0,1) - \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$$

• $v_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right).$

v_1, v_2 formano una base ortonormale di U. Se si fosse partiti da un'altra base di U diversa da (u_1, u_2), si sarebbe trovata un'altra base ortonormale.

Osserviamo che $\dim U^\perp = 1$: per trovare una sua base ortonormale basta fare il prodotto vettoriale

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{150}} e_1 + \frac{10}{\sqrt{150}} e_2 - \frac{5}{\sqrt{150}} e_3 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Esercizio 3

$$\begin{cases} y - \alpha z = 1 \\ x + 2z = 1 - \alpha \\ 2x + \alpha y = 0 \end{cases}$$

Studiamo il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa del sistema al variare del parametro α.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 2 & \alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & -4 & 2\alpha-2 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -4 & 2\alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

(i) Se $\alpha^2-4 \neq 0$, cioè $\alpha \neq \pm 2$, la matrice dei coefficienti ha rg 3, quindi il sistema ha una e una sola soluzione.

(ii) Se $\alpha = 2$, entrambe le matrici hanno rango 2, il sistema è compatibile e le soluzioni formano un sottospazio affine di dimensione 1 di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Se $\alpha = -2$ le 2 matrici hanno ranghi diversi, il sistema non ha soluzioni.

Risolvo nei casi (i) e (ii) con il metodo di sostituzione all'indietro:

(i) $\begin{cases} (\alpha^2-4)z = \alpha-2 \\ y-\alpha z = 1 \\ x+2z = 1-\alpha \end{cases} \implies z = \dfrac{1}{\alpha+2}$

$$y = 1+\alpha z = 1+\frac{\alpha}{\alpha+2} = \frac{\alpha+2+\alpha}{\alpha+2} = \frac{2\alpha+2}{\alpha+2}$$

$$x = 1-\alpha-\frac{2}{\alpha+2} = \frac{\alpha+2-\alpha^2-2\alpha-2}{\alpha+2} =$$

$$= \frac{-\alpha^2-\alpha}{\alpha+2} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2}$$

(ii) $\begin{cases} x+2z = -1 \\ y-2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1-2z \\ y = 1+2z \end{cases}$

Soluzione generica:

$$(-1-2z,\ 1+2z,\ z) = (-1,1,0)+z(-2,2,1)$$

Esercizio 4

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{A_t}(x) = \begin{vmatrix} t-x & 1 & 2 \\ 1 & t-x & t \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\left((t-x)^2-1\right) = (1-x)\,(x-t-1)(x-t+1)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = t+1$, $\lambda_3 = t-1$.

Se $t+1 \neq 1$ e $t-1 \neq 1$, cioè $t \neq 0$, $t \neq 2$,

A_t ha 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ è diagonalizzabile.

Se $t=0$, 1 è autovalore con $m_a(1)=2$. Vediamo $m_g(1)$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rg 2 $\Rightarrow m_g(1) = 1 < m_a(1) = 2$

$\Rightarrow A_0$ non è diagonalizzabile.

Se $t=2$, 1 è autovalore con $m_a(1)=2$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rg 1 $\Longrightarrow$ $m_g(1) = 2 = m_a(1)$

quindi A_2 è diagonalizzabile.

Aut(1) ha equazione $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$,

$x_1 = -x_2 - 2x_3$, base $(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)$.

Aut(3) : $A_2 - 3E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (1, 1, 0) \text{ è base.}$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se si vuole fare la verifica che

$A_2 = SDS^{-1}$, senza calcolare S^{-1} si può verificare semplicemente che

$A_2 S = S D$.