Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2021/2022 - 29 giugno 2022
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di sistema lineare e di una sua soluzione.

Si enuncino e si dimostrino il Teorema di Cramer e la Formula di Cramer.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$$

$I \longleftrightarrow III$

$\dim \ker f = 3 - 3 = 0$, non ha base

base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(2 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta vettoriale r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= -t \end{cases}$$

$$f(r) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ t+2t-t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim f(r) = 1$ con base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(d) **(2 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

$\mathrm{rg} A = 3 \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow$ per Teo. Cramer, il SL ha 1! soluzione.

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{l'unica soluzione è } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det\begin{pmatrix} 3-x & 9 & 6 \\ 9 & 3-x & 6 \\ 6 & 6 & 6-x \end{pmatrix} = (3-x)\cdot\left((3-x)(6-x)-36\right) - 9\cdot\left(9\cdot(6-x)-36\right) + 6\left(9\cdot 6 - 6(3-x)\right)$$

$$= -x\cdot(x^2-12x-108) = -x\cdot(x+6)(x-18)$$

$$Sp(L_B) = \{0, -6, 18\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$V_0 = \ker\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{II - 3\cdot I \\ III - 2\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{-1/12\, II \\ III - 2\cdot II}}{\overset{\frac{1}{3}\cdot I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equazioni per V_0: $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$, base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right\}$

$V_{-6} = \ker\begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{1/3\cdot II \\ 1/6\cdot III}}{\overset{1/3\cdot I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{I - 3\cdot III}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

eq.: $\begin{cases} 3x+3y+2z=0 \\ -4z=0 \end{cases}$

base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$V_{18} = \ker\begin{pmatrix} -15 & 9 & 6 \\ 9 & -15 & 6 \\ 6 & 6 & -12 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & 6 \\ 9 & -15 & 6 \\ 6 & 6 & -12 \end{pmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{3}\cdot II \\ \frac{1}{6}\cdot III}}{\overset{-\frac{1}{3}\cdot I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{III - 5\cdot I}{\overset{II - 3\cdot I}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \underset{II - III}{\overset{1/8\, II}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equazioni: $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$, base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) = {}^t M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano H e la retta s:

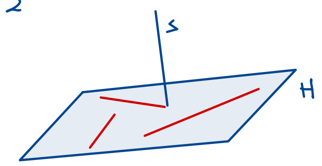
$$H:\ x+y-2z=7 \qquad s:\ \begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 3t \\ z &= 1-6t \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono ortogonali.
Inoltri, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r ortogonale ad s e contenuta in H:

$$r \perp s, \quad r \subset H.$$

Tale retta è unica?

Un vettore normale ad H è dato dai coefficienti dell'eq. omogenea $x+y-2z=0$, quindi $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; si ha che $s \perp H \iff s \parallel \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $W_s = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, quindi $s \perp H$.



Ora osservo che $\forall$ retta $r \subseteq H$, si ha che $r \perp s$; infatti: $H \perp s \Rightarrow$ ogni vettore di W_H è ortogonale a ogni vettore di W_s

quindi: se $r \subseteq H \Rightarrow W_r \subseteq W_H \Rightarrow$ ogni vettore di W_r è ortogonale a ogni vettore di W_s

$\Rightarrow$ ci sono infinite rette r tali che $r \subseteq H$ e $r \perp s$.

Ad esempio, posso scegliere $W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ e $Q = (0, 9, 1) \in H$

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 9 \\ z = 1+t \end{cases}$$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L parallelo al piano M di equazioni

$$M:\ \begin{cases} x &= 2-t \\ y &= -3-s \\ z &= t+s, \end{cases}$$

e passante per il punto $Q = (1, 1, 1)$.

$W_M = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$; $M \parallel L \iff W_L = W_M$

L deve passare per $Q = (1,1,1) \Rightarrow L$ ha eq. parametriche

$$L: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-s \\ z = 1+t+s \end{cases}$$; eq. cartesiana $\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1\end{pmatrix} = 0$

$$-1\cdot\left(-(z-1)-(y-1)\right) + 1\cdot(x-1) = 0$$

$$x-1+y-1+z-1=0$$

$$\boxed{x+y+z=3}$$