

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 20/6/2022

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + y^2}}{y^2 - x^2}$$

- (b) (2 punti) Si studi il limite di f in $(0, 0)$.
(c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo relativo, giustificando la risposta.
2. (a) (3 punti) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n(n+3)}$$

e, se convergente, se ne determini la somma.

- (b) (3 punti) Sia dia un'espressione in termini di serie di potenze del seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x}{1-x^8}.$$

- (c) (3 punti) Si provi, usando la definizione di serie convergente, che, dati $k \in \mathbb{R}$ e una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente a $l \in \mathbb{R}$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} ka_n = kl$.
3. (a) (2 punti) Si determini l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$x^2 + 2xy = y^2 + 2x$$

in uno (a scelta) dei due punti della curva di ascissa 2.

4. (a) (3 punti) Si calcoli l'integrale di

$$f(x, y) = x + y$$

sul settore circolare della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, delimitato dalle rette $y = x$ e $y = 0$ e situato nel primo quadrante del piano cartesiano.

- (b) (2 punti) Dato n numero naturale positivo, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^2 , è detta omogenea di grado n quando $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, per ogni $(x, y) \in A$ e per ogni $t > 0$ tale che $(tx, ty) \in A$.

Si dimostri che, se una tale f è anche differenziabile, $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y) \forall (x, y) \in A$.

5. (a) (3 punti) Si determini il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$$

sul triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura.

$$f(x, y) = e^{x^4+y^3-4x^2-3y^2}$$