Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 04/7/2022

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (6 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x,y) = \frac{(y-x)\sqrt{9-x^2-y^2}}{\ln(x^2y^2)}$$

   (b) (2 punti) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, giustificando la risposta.

   (c) (1 punto) Considerata la funzione $g(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\ln(x^2y^2)}$, si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di g in corrispondenza del punto $(1,2)$ del suo dominio.

2. (a) (3 punti) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{4n}$$

   (b) Si consideri, per $x \in]0,+\infty[$, la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$$

   i. (2 punti) Si studi la sua convergenza puntuale.

   ii. (2 punti) Si dimostri che, per qualunque $\delta > 0$, la serie converge uniformemente nell'intervallo $[\delta,+\infty[$.

   iii. (1 punto) La funzione somma della serie è continua nell'intervallo $]0,+\infty[$? Si giustifichi la risposta.

   (c) (2 punti) Date due serie numeriche $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$, con $0 \leq b_n \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si provi che se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge allora anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge e si ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

3. (a) (2 punti) Sia $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ una serie numerica, con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che, se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

   (b) (3 punti) **Esercizio facoltativo**
   Si dimostri che vale anche il viceversa dell'implicazione di cui al punto $3(a)$.

4. (a) (3 punti) Si calcoli l'integrale di

$$f(x, y) = yx^2 + y^3$$

sulla regione del piano cartesiano delimitata dalle curve di equazione $y = \frac{2}{3}x$ e $y = 2\sqrt{x}$.

   (b) (1 punto) Si dia la definizione di insieme misurabile secondo Riemann in $\mathbb{R}^2$.

5. (a) (3 punti) Si determini il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) (2 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = x + y - \frac{1}{3}(x^3 + y^3).$$