Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2021/2022 - 20 luglio 2022
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di sistema lineare e di una sua soluzione.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$\mathrm{rg}\, M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = 1 = \dim \mathrm{Im} f$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}\, f = 3 - 1 = 2$, equazione del $\ker f$: $x_1 + x_2 = 0$

base di $\ker f$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(2 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta vettoriale r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= 3t \end{cases}$$

$$f(r) = \begin{pmatrix} t + 2t \\ t + 2t \\ t + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \\ 3t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim f(r) = 1$, con base $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(d) **(2 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{III - I}{\overset{II - I}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, (A|b) = 1$$

$\Rightarrow$ è compatibile e la generica soluzione dipende da $3 - 1 = 2$ parametri

$x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_3 = s, \quad x_2 = t, \quad x_1 = 2 - t$: $\begin{pmatrix} 2 - t \\ t \\ s \end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 3 & 0 \\ 3 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -6-x \end{pmatrix} = (-6-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (-6-x) \cdot \left((3-x)^2 - 9 \right) = (-6-x) \cdot (x^2 - 6x) = -x(x-6)(x+6)$$

$$\Rightarrow \quad Sp(B) = \{0, 6, -6\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -6x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -12x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-6} = \ker \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano H e la retta s:

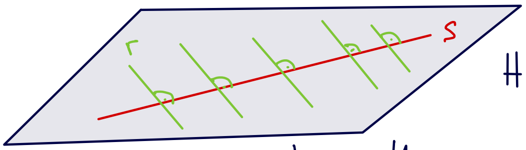
$$H: \; x = 7 \qquad s: \begin{cases} x &= 7 \\ y &= 3t \\ z &= 1 - 6t \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono ortogonali.
Inoltri, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r ortogonale ad s e contenuta in H:

$$r \perp s, \quad r \subset H.$$

Tale retta è unica?

Dalle equazioni parametriche di s osservo subito che $s \subseteq H$ (perché ogni punto di s soddisfa $x=7$), quindi NON sono ortogonali.



Le possibili rette r sono infinite e tutte parallele tra loro.

Le loro giaciture deve: essere $\subseteq$ giacitura di H, e $\perp$ alla giacitura di s

$W_r = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$; $W_r \subseteq W_H$: $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ deve soddisfare $x = 0 \Rightarrow l = 0$

$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \perp W_s$, $W_s = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3m - 6n = 0$, ad es. $\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Infine, affinché $r \subseteq H$, basta che passi per un punto $Q \in H$, ad esempio

$Q = (7,0,0) \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 7 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L parallelo al piano M di equazioni

$$M: \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 1 + s \\ z &= 1, \end{cases}$$

e passante per il punto $Q = (1, 1, 2)$.

$W_M = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = W_L$, L deve passare per $Q = (1,1,2)$

$\Rightarrow$ eq. parametriche di L $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + s \\ z = 2 \end{cases}$; eq. cartesiana di L:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & z-2 \end{pmatrix} = 0$, $\quad z - 2 = 0$, $\quad \boxed{z = 2}$