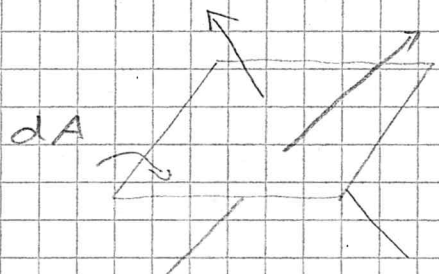


CAP. 1: RADIAZIONE E TRASPORTO RADIATIVO

1.1 Il Flusso

Assumendo che il sistema che emette sia molto più grande della λ della radiazione emessa, possiamo considerare la radiazione come propagantesi lungo linee rette nello spazio vuoto o in un mezzo omogeneo, ignorando la dualità particella/onda dei fotoni.

Definizione di flusso di energia: è l'energia dE che passa attraverso l'elemento di area dA nel tempo dt



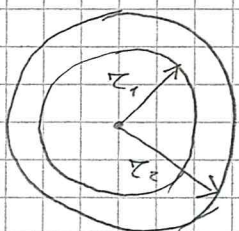
$$dE = F dA dt$$

$$\text{Unità di } F: \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$$

In generale F dipende sia dall'orientazione di dA , sia dalla frequenza della radiazione.

Una sorgente di radiazione si dice essere isotropa nel caso emetta uguali quantità di energia in ogni direzione.

Es: le stelle sono sorgenti isotrope, mentre non lo sono gli AGN, che emettono lungo dei getti.



In conseguenza della conservazione dell'energia, il flusso attraverso le due shell sferiche sarà uguale:

$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 F(r_1) = 4\pi r_2^2 F(r_2) \Rightarrow F(r) = \frac{\text{const}}{r^2}$$

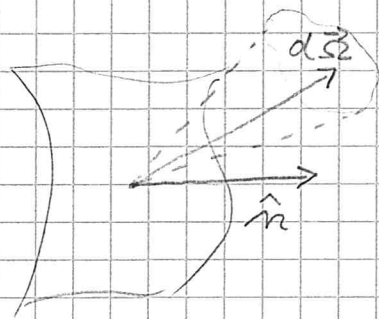
1.2 Intensità specifica

Descrive l'energia trasportata da ciascun singolo raggio. Siccome ciascun raggio è infinitamente sottile ciascuno di essi trasporta, strettamente parlando, un'energia nulla.

Si guarda allora all'energia che passa attraverso l'area dA ,

con normale \hat{n} , contenuta in tutti i raggi che si dirigono verso la direzione spaziale identificata dall'elemento di angolo solido $d\Omega$.

L'intensità specifica, I_ν , nella banda $[\nu, \nu+d\nu]$ si definisce come (Fig. 1.2 di R-L):

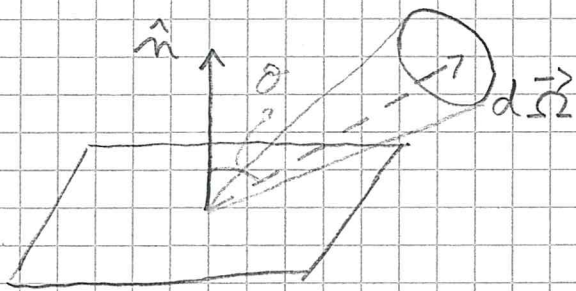


$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu$$

- Unità di I_ν : $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$
- I_ν dipende da polarizzazione, direzione e frequenza

$I_\nu = \text{const}$ in un campo di radiazione isotropo.

Dalla def. di I_ν , si può calcolare il flusso netto nella direzione \hat{n} (Fig. 1.3 di R-L)



Contributo al flusso nella direzione \hat{n} , dal campo di radiazione nell'angolo solido $d\Omega$

$$dF_\nu = I_\nu \cos\theta d\Omega$$

Il flusso netto nella direzione \hat{n} si ottiene integrando su tutti gli angoli:

$$F_\nu = \int I_\nu(\Omega) \cos\theta d\Omega$$

1.3 Densità specifica di energia u_ν

La densità di energia u_ν è definita come l'energia per unità di volume per intervallo unitario di frequenza.

Consideriamo $u_\nu(\Omega)$: dens. di energia per unità di angolo solido
 $dE = u_\nu(\Omega) dV d\Omega d\nu$

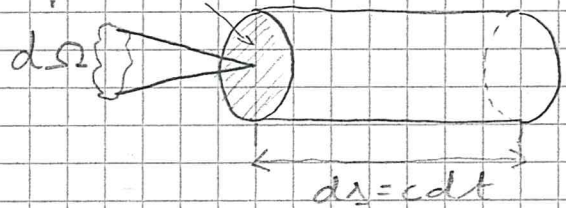
Nel caso di propagazione della luce, l'elemento di volume è

$$dV = c dt dA \Rightarrow dE = c u_\nu(\Omega) d\Omega dt dV dA$$

Confrontando con la definizione di intensità (FIG. 1.4 R-2)

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{energia che passa fuori dal cel.} \\ \text{nel tempo } dt \end{array} \right. dA$$

$$\Rightarrow \boxed{u_\nu(\Omega) = I_\nu / c}$$



Energia per unità di volume per intervallo unitario di frequenza.

1.4 Intensità media

La densità totale di energia alla frequenza ν è:

$$u_\nu = \int_{4\pi} u_\nu(\Omega) d\Omega = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

Così l'intensità media è definita come

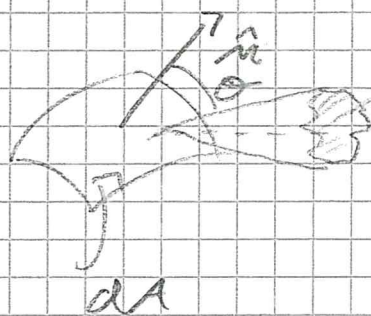
$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega$$

Per un campo di radiaz. isotropo è $I_\nu(\Omega) = I_\nu$; $J_\nu = I_\nu$

La densità totale di radiazione si ottiene integrando sulla frequenza:

$$u = \int u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu$$

1.4 Pressione di radiazione



$d\Omega$ Flusso del momento ortogonale ad dA :

momento per unità di tempo e di area
= pressione

Momento di un fotone: E/c

Flusso del momento lungo un raggio all'angolo θ
 dF_{ν}/c

Componente del flusso normale ad dA : $dF_{\nu} \cos \theta / c$

Integrando nell'angolo solido:

$$p_{\nu} (\text{dyne cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}) = \frac{1}{c} \int I_{\nu} \cos^2 \theta d\Omega$$

Integrando nella frequenza si ottengono flusso di e di momento ed intensità totali:

$$F (\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}) = \int F_{\nu} d\nu$$

$$p (\text{dyne cm}^{-2}) = \int p_{\nu} d\nu$$

$$I (\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1}) = \int E_{\nu} d\nu$$

Pressione di radiazione in un contenitore chiuso costantemente campo di radiazione isotropo:

per pareti riflettenti ogni fotone trasmette due volte la componente normale del momento:

$$p_{\nu} = \frac{2}{c} \int I_{\nu} \cos^2 \theta d\Omega \quad \int \rightarrow \text{coincide con quella di sopra perché qui si integra su } 2\pi \text{ ster.}$$

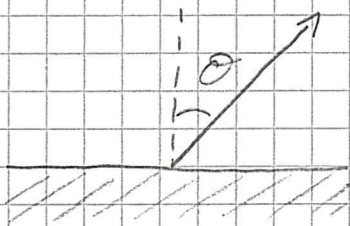
Per l'isotropia si ha campo di radiaz. isotropo:

$$\mu = \frac{2}{c} \int \bar{J}_\nu d\nu \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{3} u$$

Integrando su tutti gli angoli si ottiene il flusso totale:

~~$$F_D = \int_{4\pi} I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$~~

Esempio: nel caso di atmosfere stellari, si considera spesso il trasporto di radiazione attraverso strati orizzontali di materia. Assumendo geometria cilindrica, si ha: $\mu = \cos \theta$

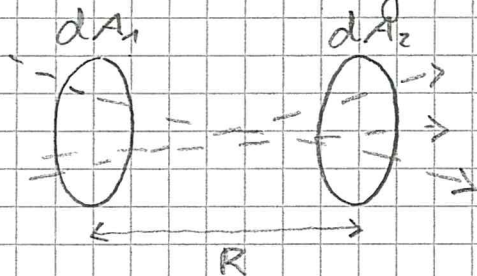


$$\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin \theta \Rightarrow$$

$$F_D = \int_{-1}^{+1} -\frac{d\mu}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi I_\nu(\mu, \varphi) \mu \sin \theta$$

$$= \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi I_\nu(\mu, \varphi) \mu = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu(\mu) \mu d\mu$$

- Si può dimostrare che l'intensita specifica \bar{I} e costante lungo la linea di vista, il raggio (FIG. 1.5 R-L)



L'energia trasportata attraverso le aree dA_1 e dA_2 e:

$$dE_1 = I_1 dA_1 dt d\Omega_1 d\nu$$

$$dE_2 = I_2 dA_2 dt d\Omega_2 d\nu$$

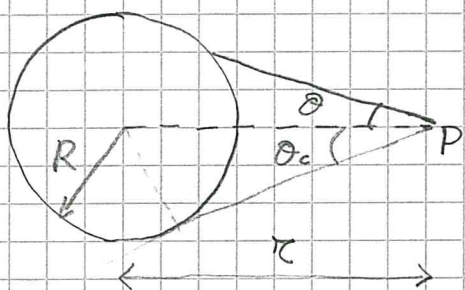
$d\Omega_1$: angolo sotteso da dA_2 alla posizione di dA_1 (viceversa per $d\Omega_2$): $d\Omega_1 = dA_2/R^2$; $d\Omega_2 = dA_1/R^2$

Dalla conservazione dell'energia: $dE_1 = dE_2$

$$\Rightarrow I_1 dA_1 dt \frac{dA_2}{R^2} d\Omega = I_2 dA_2 dt \frac{dA_1}{R^2} d\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = I_2 = \text{const}}$$

Questo non contraddice il fatto che $F(\pi) \propto \pi^{-2}$



Dimostrazione: (FIG. 1.6 R-L)

Sfera di brillanza superficiale β uniforme; il flusso ricevuto al punto P è contribuito da tutti i punti visibili sulla sfera

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = \beta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

da $\sin \theta_c = R/r$, quindi:

$$F = 2\pi\beta \int_0^{\arcsin(R/r)} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Essendo $\int_0^\alpha \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$

$$\Rightarrow F = \pi\beta \left(\frac{R}{r}\right)^2 \propto r^{-2}$$

$\Rightarrow F(r) \propto r^{-2}$ è la conseguenza del decrescere dell'angolo solido sotteso da un oggetto

L'intensità specifica I_ν è costante, ma l'angolo solido sotteso dalle sorgenti diminuisce in modo tale che la legge $\propto 1/r^2$ è recuperata.

CAP. 2. TRASPORTO RADIATIVO

Nel propagarsi attraverso la materia, la radiazione può acquistare o perdere energia per emissione o assorbimento, cosicché l'intensità specifica I_ν può variare. Inoltre, scattering di fotoni ~~non~~ può fare variare l'intensità del fascio di radiazione.

Emissione

Il coefficiente di emissione monocromatico alla freq. ν , j_ν , è definito come l'energia emessa per l'unità di tempo, volume e angolo solido alla freq. ν :

$$dE_\nu = j_\nu dV dt d\Omega d\nu$$

j_ν : coeffic di emissione spontanea (unità: $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$)

La variazione di intensità è:

$$dI_\nu = j_\nu ds \quad (dV = dA ds)$$

j_ν dipende dalla direzione.

Per un emettitore isotropo (σ per sorgenti orientate in modo random):

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu$$

P_ν : potenza di irraggiamento per unità di volume.

Emissività ϵ_ν , definita come energia emessa per unità di freq., di tempo e di massa ($\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$). Per emissione isotropa:

$$dE_\nu = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\Rightarrow j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi}$$

Absorbimento

Il coefficiente di assorbimento α_ν (cm^{-1}) rappresenta la perdita di intensità di un beam nell'attraversare la distanza ds . Def: $\alpha_\nu > 0$ per energia sottratta al beam: $dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$

Se la radiazione si propaga in un mezzo con densità in numero di particelle n (cm^{-3}), ciascuna con sezione d'urto (area efficace di assorbimento) σ_ν (cm^2), si ha (Fig. 1.7 R-L)

- $n dA ds$: numero di assorbitori

- $n\sigma_\nu dA ds$: area di assorb. totale alla freq. ν

\Rightarrow L'energia assorbita dal beam è:

$$-dI_\nu dA d\Omega dt d\nu = I_\nu (n\sigma_\nu dA ds) d\Omega dt d\nu$$

$$\Rightarrow dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds = -\alpha_\nu I_\nu ds \Rightarrow \alpha_\nu = n\sigma_\nu$$

~~L'emissività integrata, E_ν , è definita come l'energia emessa per unità di massa:~~

~~$$dE_\nu = E_\nu g dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}$$~~

~~dove $d\Omega/4\pi$ è la frazione totale dell'angolo coperto dall'emissione. Per emissione isotropa~~

~~$$E_\nu = \frac{4\pi j_\nu}{g}$$~~

In modo analogo si def. l'assorb. per unità di massa assorbente $\alpha_\nu = n g (\sigma_\nu / g) = g \kappa_\nu$; κ_ν : coeff. di opacità ($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$)

Ci sono importanti limiti per la validità di tale modello microscopico:

1. la scala della sez d'urto è molto più piccola della separazione media degli assorbitori: $\sigma_s^{-1/2} \ll d \nu n^{-1/3}$
2. gli assorbitori sono indipendenti l'uno dall'altro e sono distribuiti in modo casuale.

Equazione del trasporto radiativo

Dalle def dei coeff di assorbimento ed emissione spontanea, si ha:

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu} \rightarrow \text{Eq. del TR}$$

Le forme funzionali di α_ν e j_ν dipendono dai vari processi fisici in gioco

In presenza anche di scattering l'emissione in $d\Omega$ dipende dal valore di I_ν negli angoli solidi $d\Omega'$, integrato su $d\Omega'$ (per lo scattering da $d\Omega'$ a $d\Omega$).

In tal caso l'eq. del TR diviene integrale differenziale e la sua soluzione richiede tecniche numeriche.

Due casi-limiti semplici:

1. Pura emissione: $\alpha_\nu = 0$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \Rightarrow I_\nu(s) = I_\nu(0) + \int_0^s j_\nu(s') ds'$$

Assumendo $s=0$ per l'origine della propagazione

\Rightarrow Per pura emissione, la crescita della brillantezza è uguale all'emissività integrata lungo la linea di vista.

2. Puro assorbimento: $j_\nu = 0$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu(s)$$

\Rightarrow L'intensità alla profondità s in un mezzo che è irraggiato dall'esterno con intensità

$I(s=0) = I_0$, è data da:

$$I_\nu(s) = I_0 \exp\left(-\int_0^s \alpha_\nu(s') ds'\right) = I_0 e^{-\tau_\nu}$$

dove τ_ν : profondità ottica

\Rightarrow Per puro assorbimento, l'intensità decresce esponenzialmente con la profondità ottica.

$$\tau_\nu(s) = \int_0^s \alpha_\nu(s') ds' = \int_0^s n(s') \sigma_\nu ds'$$

Nel caso di mezzo omogeneo: $\tau_\nu(s) = n \sigma_\nu s$

$\tau > 1 \Rightarrow$ mezzo otticamente "spesso" o opaco

$\tau < 1 \Rightarrow$ " " " " "sottile" o trasparente

Legge di assorbimento esponenziale

$\Rightarrow \exp(-\tau)$: probabilità che un fotone percorra una distanza $> \tau$.

La profondità ottica media attraversata è quindi uguale

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1 \quad \text{all'unità:}$$

Il percorso che corrisponde a $\tau = 1$ si definisce come "libero cammino medio" dei fotoni

$$\tau_\nu = n \sigma_\nu l_\nu \Rightarrow \langle l_\nu \rangle = (n \sigma_\nu)^{-1} \rightarrow \text{libero cammino medio} \\ = \alpha_\nu^{-1}$$

Per un mezzo disomogeneo, il libero cammino medio si definisce localmente

Esempio: $\rho \sim 150 \text{ g cm}^{-3}$ al centro del sole

Assumendo solo H $\Rightarrow n \sim 9 \times 10^{25} \text{ parts cm}^{-3}$

$\sigma \sim 10^{-25} \text{ cm}^2 \Rightarrow \langle l \rangle_0 \sim 1 \text{ mm}$ da confrontare con

$R_0 \sim 7 \times 10^{10} \text{ cm}$

Soluzioni formale del TR

Si considerino le varie quantità come funzioni di τ_ν invece che di s

$$\tau_\nu = \int_0^s \alpha(s') ds' \Rightarrow ds = \frac{d\tau_\nu}{d\alpha_\nu}$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu = S_\nu - I_\nu$$

S_ν è def. essere la funzione sorgente

La soluzione formale dell'eq. del TR è:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

Interpretazione: l'intensità emergente dal mezzo assorbente è uguale alla intensità irradiata (entrante, corretta per l'assorbimento, nonché per l'effetto integrato del termine di sorgente, corretto a sua volta per l'assorbimento).

Se come α_ν può anche contenere l'effetto dell'emissione stimolata (αI_ν ; vedi poi) la soluz. formale non è in forma analitica per alcun sistema fisicamente significativo.

Derivazione della soluzione formale:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad ; \quad e^{\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + e^{\tau_\nu} I_\nu = S_\nu e^{\tau_\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu e^{\tau_\nu}) = e^{\tau_\nu} S_\nu$$

$$\Rightarrow e^{\tau_\nu} I_\nu(\tau_\nu) - I_\nu(0) = \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

$$\Rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad \text{c.v.d.}$$

Esempio: funzione sorgente costante

$$S_\nu = \text{const} \Rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$$
$$= S_\nu + e^{-\tau_\nu} (I_\nu(0) - S_\nu)$$

$$\Rightarrow I_\nu \rightarrow S_\nu \text{ per } \tau_\nu \rightarrow \infty$$

Si noti che se $I_\nu > S_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0 \Rightarrow I_\nu$ decresce lungo il raggio

$$I_\nu < S_\nu \Rightarrow I_\nu \text{ cresce}$$

Quindi I_ν tende sempre a raggiungere S_ν , più efficientemente per τ_ν grande.

In tal senso l'eq del trasporto radiativo descrive un processo di rilassamento.

$\Rightarrow S_\nu$ è la quantità che I_ν tende a raggiungere

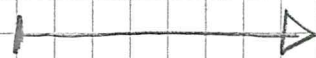
\Rightarrow Il trasporto radiativo può essere visto come un fenomeno di rilassamento

LA RADIAZIONE DI CORPO NERO

Un sistema interessante è quello in cui il campo di radiazione è in equilibrio termico con se stesso. Questo è il caso della radiazione di corpo nero.

Attenzioni:

1. I fotoni sono bosoni, quindi più di uno può occupare la stessa cella nello spazio delle fasi (non vale il principio di esclusione di Pauli come per i fermioni)
2. I fotoni sono in equilibrio termodinamico ad ogni frequenza.



✓ Schema della derivazione dello spettro di Planck

1. Calcolo dell'energia media dei fotoni di frequenza ν , $\langle E(\nu) \rangle$
2. " dal numero di celle dello spazio delle fasi, in funz. della freq. ν , $N(\nu)$
3. Calcolo dello spettro, dato da $\langle E(\nu) \rangle \cdot N(\nu)$

1. Calcolo di $\langle E(\nu) \rangle$

Si consideri una cella dello spazio delle fasi come una scatola

I fotoni sono la soluzione dell'oscillatore armonico quantistico \Rightarrow

L'energia totale con n fotoni nella cella

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

La probabilità che l'oscillatore sia nell' n -esimo stato è dato dalla distrib. di Boltzmann:

← I (FIG. 1.8 R-L)

Fotoni possono essere creati e distrutti in numero arbitrario dall'interazione con le pareti del contenitore al cui interno c'è il campo di radiazione di intensità $I_\nu \Rightarrow$ non conservazione del num. di fotoni che si aggira per essere in equilibrio alla temp. T .

I_ν non dipende dalle proprietà del contenitore, ma solo da T .

Prova: due contenitori diversi con filtro che lascia passare solo la freq. ν . Se $I_\nu \neq I'_\nu \Rightarrow$ flusso di energia tra i due contenitori. Ma se sono alla stessa temperatura, violerebbe la 2^a legge della termodinamica

$$\Rightarrow I_\nu = \text{flusso di energia di } T \text{ e } \nu \equiv B_\nu(T)$$

Corollario: I_ν isotropa

$B_\nu(T)$ è chiamata funzione di Planck o Planckiana
Legge di Kirchhoff per emissione termica

Materiali che emettono termicamente a temp. T , calibrati all'apertura di un contenitore corpo nero alla stessa temp. T (FIG 1.9 RL)

S_ν : funz. sorgente dell'emittitore

$$\text{Se } S_\nu > B_\nu \Rightarrow I_\nu > B_\nu, \text{ se } S_\nu < B_\nu \Rightarrow I_\nu < B_\nu$$

Ma la presenza dell'emittitore non può alterare la radiaz. (la nuova config. è anche un BB a temp. T)

$$\Rightarrow S_\nu = B_\nu(T)$$

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \rightarrow \text{Kirchhoff's Law}$$

Relaz. tra coeff. di emissione, coeff. di assorb. e temperatura della materia

Quindi l'eq del trasp. rad diventa:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$$

Se come $S_\nu = I_\nu$ ovunque nel contenitore

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = 0 \Rightarrow I_\nu = B_\nu(T)$$

Radiazione di BB omogenea e isotropa, con $\bar{p} = \frac{1}{3}u$

Distinguiamo tra radiazione di BB, dove $I_\nu = B_\nu$,
e radiazione termica, per cui $S_\nu = B_\nu$. La radiaz.
termica diventa di BB solo in un mezzo
otticamente spesso

$$P_n(\nu, T) = \frac{\exp(-\beta(n+1/2)h\nu)}{\sum_{n'} \exp(-\beta(n'+1/2)h\nu)} = \frac{\exp(-n h\nu/kT)}{\sum_{n'} \exp(-n' h\nu/kT)} ; \beta = (kT)^{-1}$$

Quindi, l'energia media per cella nello spazio delle fasi è

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P_n(\nu, T) = \sum_n \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu \frac{\exp(-n h\nu/kT)}{\sum_{n'} \exp(-n' h\nu/kT)} \right\}$$

$$= (x = h\nu/kT) = \frac{kT \sum_n (n+1/2) x \exp(-nx)}{\sum_n \exp(-nx)}$$

$$= kT \left\{ \frac{\sum_n n x e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}} + \frac{x}{2} \right\}$$

Essendo $\sum_n e^{-nx} = (1 - e^{-x})^{-1}$

$$\sum_n n x e^{-nx} = \frac{x e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{h\nu e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{h\nu}{2} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{h\nu}{2}$$

Si ricordi che l'energia di ground-state (del vuoto) non è osservabile \Rightarrow il termine $h\nu/2$ si può eliminare rinormalizzando il punto-zero dell'energia.

Tale risultato è aspettato sulla base della statistica di Bose-Einstein per il numero di occupazione di particelle con potenziale chimico $\mu=0$

$$n_g(\nu, T) = \frac{\langle E \rangle}{h\nu} = \left(e^{h\nu/kT} - 1 \right)^{-1}$$

2. Calcolo della densità di celle nella box di lato L_x, L_y, L_z

Sia $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} = \frac{2\pi\nu}{c} \hat{n}$ il vettore d'onda dei fotoni

Si contano tutti i fotoni distinguibili, cioè fotoni con differenziale spin (i.e. stati di polarizzazione = 2) e differenziale numero d'onda \hat{n} .

$$n_x = \frac{L_x}{\lambda} = \frac{k_x L_x}{2\pi} ; \quad dn_x = \frac{L_x dk_x}{2\pi}$$

Per $n \gg 1$ si ricade nel caso "continuo".

Si ha

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{V d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} ; \quad V = L_x L_y L_z$$

Inoltre, il numero di stati per unità di volume e di numero d'onda è:

$$\frac{n_x}{d^3 \vec{k}} = g \frac{dN}{V} \frac{1}{d^3 \vec{k}} = \frac{2}{(2\pi)^3}$$

viene dai due stati di elicità o spin.

Si avrà quindi:

$$d^3 \vec{k} = k^2 dk d\Omega = \frac{(2\pi)^3}{c^3} \nu^2 d\nu d\Omega$$

così la densità di stati è:

$$\rho_s = \frac{n_\nu}{d\nu d\Omega} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3}{c^3} \nu^2 = \frac{2\nu^2}{c^3}$$

↑

numero di stati per angolo solido, volume e frequenza

In tal modo, l'energia totale è

$$u_\nu(\Omega) = \langle E \rangle \rho_s = \frac{2h\nu^3}{c^3} \left[e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right]^{-1}$$

↳ energia per volume, per freq. e angolo solido

Essendo $u_\nu = I_\nu / c$, l'intensità per un corpo nero è

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1} = B_\nu \rightarrow \text{Def della spettra di BB}$$

In termini di λ : $B_\lambda = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu)$

~~[FIGURA A PAG. 3.8 DELLE DISPENSE]~~ FIG. 1.11 R-L

Legge di Rayleigh-Jeans

$$h\nu \ll kT \Rightarrow \left(e^x = 1 + x + \dots \right) \Rightarrow B_\nu \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

Tale legge si usa alle frequenze radio per misurare la temperatura di brillanza

$$T_b = I_\nu \frac{c^2}{2k\nu^2} \quad I_\nu: \text{intensità radio misurata}$$

Legge di Wien

$$h\nu \gg kT \quad \left(e^x - 1 \approx e^x \text{ se } x \gg 1 \right) \Rightarrow B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Legge dello spostamento di Wien

La frequenza a cui l'intensità è massima, ν_{\max} , si ottiene

da $\left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu_{\max}} = 0 \Rightarrow x = 3(1 - \exp(-x))$; $x = \frac{h\nu_{\max}}{kT}$

La soluzione è $x = 2.82 \Rightarrow \boxed{h\nu_{\max} = 2.82 kT}$

\Rightarrow La frequenza a cui il flusso è massimo è direttamente proporzionale alla temperatura del corpo nero

In modo analogo, per la lunghezza d'onda:

$$\lambda_{\max} T = 0.2898 \text{ cm K}$$

Si noti che $\lambda_{\max} \nu_{\max} \neq c$.

$h\nu \ll kT$: regime di Rayleigh-Jeans

$h\nu \gg kT$: " " Wien

MOSTRARE FIGURA DI PAGINA 3-12

legge di Stefan-Boltzmann

La brillantezza totale di un corpo nero si ottiene come:

$$B(T) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = (x = h\nu/kT) = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$= \pi^4/15$

$$= \frac{2\pi^5}{15c^2 h^3} (kT)^4 = \frac{ac}{4\pi} T^4 = \frac{\sigma_{SB}}{\pi} T^4$$

Convertendo la brillantezza B in flusso F , $F = \pi B$

$$\Rightarrow \boxed{F = \sigma_{SB} T^4} \rightarrow \text{Legge di Stefan-Boltzmann}$$

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{costante di densità} \\ \text{di radiazione} \end{array} \right.$$

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.671 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{costante di} \\ \text{Stefan-Boltzmann} \end{array} \right.$$

Temperatura effettiva

T_{eff} per lo spettro I_ν è definita come

$$F = \int I_\nu \cos\theta \, d\nu \, d\Omega = \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4$$

Dove I_ν può essere necessariamente lo spettro di corpo nero
A volte I_ν è misurato su un intervallo finito di
lunghezze d'onda e in tal caso T_{eff} può dipendere da tale
intervallo

MOSTRARE FIGURA DI PAG. 3-14

ESEMPIO DEI PIANETI:

La temperatura di un corpo irraggiato è data dalla
condizione di equilibrio energetico:

$$\frac{L_\odot}{4\pi a^2} \pi r^2 = \sigma_{\text{SB}} T^4 4\pi r^2$$

a : distanza dal sole

r : raggio del pianeta

$$\Rightarrow T = \left(\frac{L_\odot}{16\pi\sigma_{\text{SB}} a^2} \right)^{1/4} = \frac{281 \text{ K}}{(a/1 \text{ UA})^{1/2}} \quad \begin{matrix} L_\odot = 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \\ 1 \text{ UA} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm} \end{matrix}$$

Se il pianeta riflette parte della radiazione e se l'emissività
nella banda IR è approssimabile con un corpo
nero, allora

$$(1-B) \frac{L_\odot}{4\pi a^2} \pi r^2 = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{281 \text{ K}}{(a/1 \text{ VA})^{1/2}} \left(\frac{1-B}{\epsilon} \right)^{1/4} ; \quad \begin{array}{l} B: \text{albedo di Bond} \\ \epsilon: \text{emissività effettiva} \end{array}$$

Per la Terra: $B = 0.39$

Venere: $B = 0.72$

Essendo $T_{\text{Terre}} \approx 288 \text{ K} \Rightarrow \epsilon = 0.55 < 1$: Effetto serra

I coefficienti di Einstein

legge di Kirchhoff : $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu \Rightarrow$ relazione tra emissione e assorbimento di un emettitore termico
 \Rightarrow relazione tra emissione e assorbimento a livello microscopico.

\Rightarrow Scoperta da Einstein:

Caso di due livelli di energia discreti (FIG. 1.12RL)

Liv. 1: Energia E e peso statistico g_1

" 2: " " $E + h\nu_0$ " " g_2

Transizione da 1 a 2 con assorb. di fotone $h\nu_0$

" " " 2 e 1 " emissione " " "

Einstein identificò 3 processi:

1. Emissione spontanea \rightarrow transit. da 2 a 1 anche senza campo di radiaz. esterno

Coeff. di Einstein A :

A_{21} = probab. di transit. per unità di tempo per emissione spontanea (s^{-1})

2. Assorbimento: avviene in presenza di fotoni $h\nu_0$; probab. per unità di tempo proporz. alla densità di fotoni $h\nu_0$.

Preziosamente lo ΔE tra 1 e 2 non sarà infinitamente sottile, ma caratterizzata da una funzione di profilo di linea $\phi(\nu)$:

$$\int_0^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1$$

$\Rightarrow B_{12} \bar{j}$: probabilità per unità di tempo per assorbimento

B_{12} : coeff. di Einstein B

3. Emissione stimolata, dalla presenza di fotoni
 $B_{21} \bar{j}$ = probab. di transiz. per unità di tempo per emissione stimolata.

Se J_ν cambia lentamente entro la larghezza di linea $\Delta\nu$, $\phi_\nu \sim \delta$ -function

\Rightarrow I coeff. diventano $B_{12} J_\nu$ e $B_{21} J_\nu$.

Relazioni tra coeff. di Einstein

In equil. termodinamica, num. di transiz. per unità di tempo $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$ uguali:

n_1, n_2 : densità in num. di atomi in stato 1 e 2

$$\Rightarrow n_1 B_{12} \bar{j} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{j}$$

$$\Rightarrow \bar{j} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}$$

In equil. termodinamica:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu_0}{kT}}$$

$$\Rightarrow \bar{j} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/kT) - 1} \quad (*)$$

In equil. termod.: $J_\nu = B_\nu \cdot B_\nu$ varia lentamente entro $\Delta\nu \Rightarrow \bar{j} = B_\nu$.

Affinché la (*) sia uguale alla Planckiana, si deve avere:

$$\left. \begin{aligned} g_1 B_{12} &= g_2 B_{21} \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{connettono le proprietà atomiche } A_{21}, B_{12} \text{ e } B_{21}^{(*)} \Rightarrow \text{devono valere indipendentemente dal fatto che gli atomi si trovino in equil. termod.}$$

Nota: una dei coeff di Einstein, si ricavano gli altri due. (*) Senza fare riferimento alla temperatura

Emissione/assorbimento con Einstein coeff.

Compute emission coefficient j_ν : emissia distribuita secondo $\phi(\nu)$

$j_\nu dV d\Omega d\nu dt$: energia emessa nel vol. dV , angolo nel $d\Omega$, nel tempo dt , nella freq. $d\nu$

Ogni atomo contribuisce con $h\nu_0$ su 4π sterad per ogni transizione

$$\Rightarrow j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)$$

Calcolo del coeff di assorb. α_ν :

energia assorbita in dt e dV :

$$dV dt h\nu_0 n_1 B_{12} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int d\nu \phi(\nu) I_\nu$$

\Rightarrow Energia assorbita da un beam alla freq. ν , in $d\Omega$, dt e dV

$$dV dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu$$

Essendo $dV = dA ds \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu)$

Per l'emissione stimolata, la si tratta come assorbimento negativo

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21})} \quad \text{↳ assorbimento corretto per emissione stimolata}$$

Eq. del trasporto radiativo tramite coeff di Einstein:

$$\frac{dI_\nu}{d\Delta} = -\frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)$$

Funzione sorgente: $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$

Usando le relaz tra coeff di Einstein:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) \phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1} \quad \text{↳ generalizzate della legge di Kirchhoff}$$

Emissione termica

Se materia in equilibrio termico con se stessa (non necessariamente con la radiazione):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

⇒ materia in "local thermodynamical equil" (LTE)

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \phi(\nu) \quad \text{↳ covex. dovuta a emissione stimolata}$$

$$S_\nu = B_\nu \rightarrow \text{Kirchhoff's Law}$$

