# Energia potenziale e conservazione dell'energia

## 8.1 ENERGIA POTENZIALE

### Obiettivi di apprendimento

*Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...*

8.01 Distinguere tra una forza conservativa e una forza non conservativa.

8.02 Capire che il lavoro svolto da una forza conservativa su una particella che si muove da una posizione iniziale a una finale non dipende dal percorso seguìto dalla particella.

8.03 Calcolare l'energia potenziale gravitazionale di una particella o, più propriamente, del sistema particella-Terra.

8.04 Calcolare l'energia potenziale elastica di un sistema blocco-molla.

### Idee chiave

- Una forza si dice conservativa se il lavoro netto che compie su una particella che percorre un cammino chiuso, da una posizione iniziale alla medesima posizione, è pari a zero. Detto in altro modo, una forza è conservativa se il lavoro netto compiuto su una particella che si muove tra due punti dati non dipende dal percorso seguito dalla particella. La forza gravitazionale e la forza elastica sono forze conservative; la forza d'attrito dinamico non è conservativa.
- L'energia potenziale è l'energia associata alla configurazione di un sistema in cui agisce una forza conservativa. Quando la forza conservativa compie il lavoro $L$ su una particella entro tale sistema, la variazione di energia potenziale $\Delta U$ del sistema è definita come

$$\Delta U = -L.$$

Se la particella si muove da un punto $x_i$ a un punto $x_f$, la variazione di energia potenziale del sistema è dunque

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx.$$

- L'energia potenziale associata al sistema costituito dalla Terra e da un corpo ad essa vicino è l'energia potenziale gravitazionale. Se una particella si muove da un punto a quota $y_i$ a un punto a quota $y_f$, la variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema Terra-particella è

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y.$$

- Ponendo $y_i = 0$ e la corrispondente energia potenziale gravitazionale del sistema $U_i = 0$, quando la particella si trova a un'altezza $y$ l'energia potenziale gravitazionale $U$ è

$$U(y) = mgy.$$

- L'energia potenziale elastica è l'energia potenziale associata allo stato di compressione o allungamento di un oggetto elastico. Per una molla che esercita una forza elastica $F = -kx$, quando il suo capo libero subisce uno spostamento $x$, l'energia potenziale elastica è

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

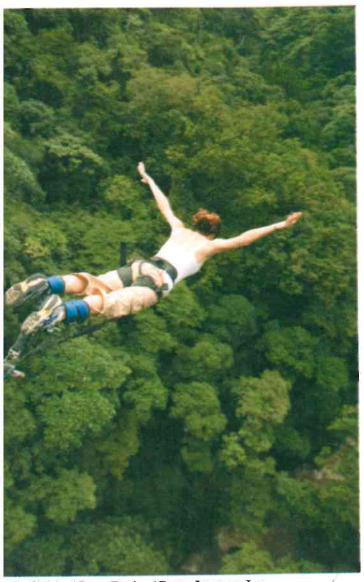
- La configurazione di riferimento vede la molla in stato di riposo con il suo capo libero in $x = 0$, ove l'energia potenziale associata è $U = 0$.

## L'aspetto fisico

È compito della fisica identificare i vari tipi di energia che si presentano in natura, specialmente quelli d'importanza quotidiana. Un tipo generico di energia è l'**energia potenziale** $U$. Tecnicamente l'energia potenziale è l'energia associabile alla configurazione (disposizione) di un sistema di corpi che esercitano reciprocamente delle forze.

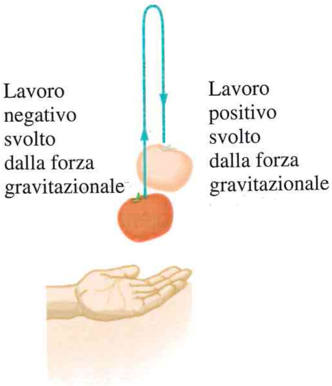
Si tratta di una definizione squisitamente formale di qualcosa che invece ci è ben più familiare. Un esempio ci aiuterà molto più che una definizione. Un saltatore con l'elastico si getta dalla piattaforma di lancio (fig. 8.1). Il sistema di corpi in questo caso è costituito dalla Terra e dal saltatore. La forza che agisce tra loro è quella gravitazionale. La configurazione del sistema durante il salto si modifica, perché la distanza tra saltatore e Terra diminuisce, cosa che costituisce l'ebbrezza dell'impresa. È possibile rendere conto del moto del saltatore

ISBN 978-88-08-18229-6



ugh Guides/Greg Roden/Getty Images, Inc.

**ura 8.1** L'energia cinetica di un sal-ore con l'elastico cresce via via du-nte la caduta, fino a che la corda co-ncia ad allungarsi frenando la corsa l saltatore.




**gura 8.2** Un pomodoro lanciato in ria. Durante la salita la forza di gravità ompie su di esso un lavoro negativo, iminuendo la sua energia cinetica. Du-nte la discesa la forza di gravità com-ie sul pomodoro un lavoro positivo, umentandone l'energia cinetica.

e della variazione di energia cinetica definendo una **energia potenziale gravitazionale** $U$: è l'energia associata allo stato di separazione tra due corpi che si attraggono per gravitazione, qui il saltatore e la Terra.

Quando il saltatore comincia ad allungare la corda elastica nella fase finale del salto, abbiamo un nuovo sistema di corpi: la corda e il saltatore. La forza che essi esercitano tra loro è di tipo elastico, come quella delle molle. La configurazione subisce una modifica: la corda si allunga. È possibile rendere conto della variazione di energia cinetica del saltatore e dell'allungamento della corda definendo una **energia potenziale elastica** $U$: è l'energia associata allo stato di compressione o estensione di un corpo elastico, qui la corda.

La fisica stabilisce come calcolare l'energia potenziale di un sistema, come l'energia si immagazzina e si consuma trasformandosi da una forma all'altra. Per esempio, prima che prenda il via ogni nuovo salto con l'elastico, qualcuno (diciamo un ingegnere meccanico) ha il compito di determinare quale corda è idonea calcolando le energie potenziali elastica e gravitazionale attese. È solo così che il tuffo si limita a essere mozzafiato, senza trasformarsi in tragedia.

# Lavoro ed energia potenziale

Nel capitolo 7 abbiamo parlato della relazione che intercorre tra il lavoro e la variazione di energia cinetica. Qui ci occupiamo invece della relazione tra il lavoro e la variazione di energia potenziale.

Lanciamo in aria ancora un pomodoro (fig. 8.2). Sappiamo già che, mentre il pomodoro sale, il lavoro $L_g$ svolto su di esso dalla forza gravitazionale che agisce nei suoi confronti è negativo perché la forza di gravità *sottrae* energia all'energia cinetica del pomodoro. Possiamo concludere ora il quadro dicendo che questa energia viene trasferita mediante la forza di gravità all'energia potenziale gravitazionale del sistema pomodoro-Terra.

Il pomodoro rallenta, si arresta e comincia a ricadere a causa della gravità. Durante la caduta i trasferimenti si invertono. Il lavoro $L_g$ svolto sul pomodoro dalla forza gravitazionale è ora positivo, come dire che la forza di gravità trasferisce energia dall'energia potenziale gravitazionale del sistema pomodoro-Terra all'energia cinetica del pomodoro.

Sia per la fase di salita sia per quella di discesa, la variazione $\Delta U$ dell'energia potenziale gravitazionale è definita come l'opposto del lavoro svolto sul pomodoro dalla forza di gravità. Possiamo quindi scrivere in generale che

$$\Delta U = -L. \tag{8.1}$$

La stessa relazione si applica al caso del sistema blocco-molla della figura 8.3. Se diamo un colpo al blocco per spingerlo verso destra, la forza elastica della molla compie un lavoro negativo sul blocco durante il movimento verso destra, trasferendo energia dall'energia cinetica del blocco all'energia potenziale elastica della molla. Il blocco rallenta, si ferma e poi inverte il cammino e torna indietro grazie alla forza esercitata dalla molla. Il trasferimento di energia si inverte, passando dall'energia potenziale della molla all'energia cinetica del blocco.

## Forze conservative e non conservative

Elenchiamo gli elementi chiave dei due fenomeni che abbiamo appena discusso.

1. Il *sistema* consiste di due o più oggetti.
2. Tra il corpo (pomodoro o blocco) e il resto del sistema agisce una *forza*.
3. Quando la configurazione del sistema varia, la forza compie *lavoro* (chiamiamolo $L_1$) sul corpo puntiforme, trasferendo energia dall'energia cinetica $K$ del corpo a qualche altra forma di energia del sistema.
4. Se il senso di variazione della configurazione si inverte, la forza inverte il trasferimento di energia, svolgendo nel processo il lavoro $L_2$.

Se $L_1 = -L_2$ è vera in ogni condizione, allora l'altra forma di energia è l'energia potenziale, e in questo caso la forza è detta **conservativa**. Come potrete immaginare, la forza gravitazionale e la forza di richiamo della molla sono entrambe conservative (altrimenti non avremmo parlato di energia potenziale gravitazionale e di energia potenziale elastica, come abbiamo fatto).

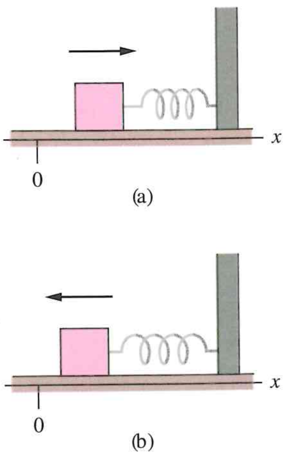



**Figura 8.3** Un blocco, fissato a una molla e inizialmente a riposo nel punto $x = 0$, è posto in movimento verso destra. (a) Nel moto verso destra la forza della molla compie lavoro negativo su di esso diminuendo la sua energia cinetica. (b) Poi, mentre il blocco ritorna verso il punto $x = 0$, la molla compie un lavoro positivo su di esso.

Una forza che non presenta tali proprietà è chiamata **forza non conservativa**. La forza d'attrito dinamico e la forza di resistenza del mezzo sono due tipi di forze non conservative. Per esempio diamo una spinta a un blocco che striscia sul pavimento con attrito. Durante lo spostamento una forza d'attrito dinamico applicata dal pavimento svolge lavoro sul blocco, rallentandolo e trasferendo energia dalla sua energia cinetica a un'altra forma di energia detta *energia termica* del sistema blocco-pavimento (qualcosa che ha a che fare con i moti casuali di atomi e molecole). Sappiamo dall'esperienza che un tal trasferimento di energia non può essere invertito (l'energia termica non si può trasferire all'energia cinetica del blocco per mezzo della forza d'attrito dinamico). In questo caso, quantunque esistano sia il sistema, sia la forza che agisce tra i vari elementi del sistema, sia il trasferimento di energia da parte di questa forza, la forza *non è* conservativa. Di conseguenza l'energia termica non è un'energia potenziale.

*Quando su un corpo agiscono solo forze conservative, possiamo semplificare in maniera notevole quei problemi che riguardano i movimenti del corpo.* Il prossimo paragrafo, dedicato a un metodo per verificare quali forze siano conservative, svilupperà anche i mezzi per giungere a queste semplificazioni.

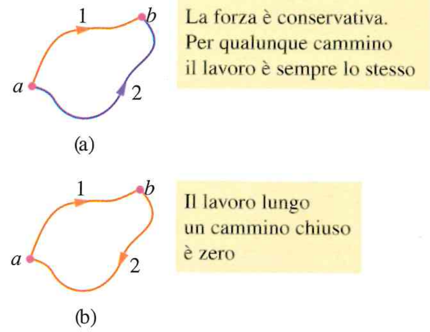



**Figura 8.4** (a) Una particella soggetta all'azione di una forza conservativa parte da $a$ e raggiunge il punto $b$ seguendo uno dei due percorsi disponibili, 1 o 2. (b) La particella percorre un circuito chiuso: parte da $a$, arriva a $b$ per il cammino 1 e ritorna in $a$ percorrendo il cammino 2.

## Indipendenza dal percorso per le forze conservative

Il principale metodo per determinare se una forza è conservativa o no consiste nella seguente prova. Facciamo agire la forza (da sola) su una particella che si muove lungo un *percorso chiuso*, che inizia cioè in un certo punto e termina nello stesso punto. La forza è conservativa se l'energia totale che essa trasferisce verso la particella e dalla particella durante l'intero cammino chiuso *è nulla*. In altri termini:

> Il lavoro complessivo netto svolto da una forza conservativa su una particella che si muove su un percorso chiuso è zero.

Per via sperimentale sappiamo che la forza gravitazionale soddisfa questa prova. Un esempio è il pomodoro di figura 8.2. Il pomodoro lascia la mano con velocità $v_0$ ed energia cinetica $\frac{1}{2}mv_0^2$ . La forza gravitazionale che agisce sul pomodoro lo rallenta, lo arresta e poi lo fa cadere. Quando il pomodoro ritorna nella stessa posizione di lancio, si trova ancora animato da velocità $v_0$ e da energia cinetica $\frac{1}{2}mv_0^2$ . Sicché la forza gravitazionale sottrae tanta energia cinetica al pomodoro durante la sua ascesa quanta gliene restituisce durante la discesa alla stessa quota di lancio. Il lavoro netto svolto sul pomodoro dalla forza gravitazionale risulta nullo.

Un importante risultato per la prova del percorso chiuso è il seguente:

> Il lavoro svolto da una forza conservativa su una particella che si muove tra due punti qualsiasi non dipende dal particolare percorso seguito.

Per esempio supponiamo che una particella si muova dal punto $a$ al punto $b$ di figura 8.4a lungo uno dei due cammini, 1 o 2. Se su di essa agisce solo una forza conservativa, il lavoro compiuto sulla particella è lo stesso per entrambi i percorsi. Possiamo scrivere dunque

$$L_{ab,1} = L_{ab,2}, \tag{8.2}$$

dove i pedici indicano il punto di partenza ($a$), quello di arrivo ($b$) e il cammino seguito (1 o 2).

Questa semplice equazione è molto potente, giacché ci permette di semplificare problemi complicati, purché vi siano coinvolte solo forze conservative. Supponiamo di dover calcolare il lavoro svolto da una forza conservativa lungo un dato percorso tra due punti e che il calcolo sia difficile o addirittura impossibile senza ulteriori informazioni. Possiamo trovare il risultato seguendo un qualsiasi altro percorso che renda il calcolo più facile. Il problema svolto 8.1 ce ne dà un esempio, ma prima dobbiamo dimostrare la validità dell'equazione 8.2.

### Dimostrazione dell'equazione 8.2

La figura 8.4b mostra un cammino chiuso, peraltro arbitrario, percorso da una particella sotto l'azione di una singola forza. La particella va dal punto $a$ al punto $b$ attraverso l'itinerario 1

 ISBN 978-88-08-18229-6

e poi torna indietro ad $a$ lungo l'itinerario 2. La forza compie lavoro sulla particella mentre essa si muove lungo ciascun tragitto. Senza preoccuparci del segno, chiamiamo $L_{ab,1}$ il lavoro svolto nel primo tragitto e $L_{ba,2}$ quello svolto nel secondo. Se la forza è conservativa, il lavoro totale compiuto lungo tutto il cammino chiuso deve essere nullo:

$$L_{ab,1} + L_{ba,2} = 0,$$

e quindi

$$L_{ab,1} = -L_{ba,2}. \tag{8.3}$$

Detto a parole, il lavoro svolto nel percorso di andata deve essere uguale in modulo e opposto in segno al lavoro svolto nel percorso di ritorno.

Consideriamo ora il lavoro $L_{ab,2}$ svolto sulla particella che si muove da $a$ a $b$ lungo il tragitto 2, come indicato nella figura 8.4a. Se la forza è conservativa, il lavoro è l'opposto di $L_{ba,2}$:

$$L_{ab,2} = -L_{ba,2}. \tag{8.4}$$

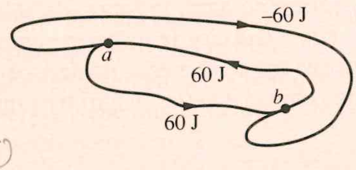
Combinando le equazioni 8.3 e 8.4 si ottiene

$$L_{ab,1} = L_{ab,2},$$

come volevasi dimostrare.

## VERIFICA 1

Il disegno qui sotto suggerisce tre percorsi che congiungono i punti $a$ e $b$. Una sola forza $\boldsymbol{F}$ compie i lavori il cui valore è segnato a fianco di ciascun percorso. Sulla base di questa informazione si può affermare che la forza è conservativa? NO




## PROBLEMA SVOLTO 8.1 Percorsi equivalenti per calcolare il lavoro, pezzo di formaggio

uesta è la lezione che si trae dal problema svolto che segue: è pienaente legittimo scegliere un percorso agevole anziché complicato. La gura 8.5a mostra un pezzo di formaggio di massa 2 kg che scivola su na superficie priva di attrito dal punto $a$ al punto $b$. Percorre 2,0 m ngo l'intero tragitto e copre un dislivello verticale di 0,80 m. Quanto voro compie la forza di gravità sul formaggio?

La forza gravitazionale è conservativa. Il lavoro è indipendente dal cammino percorso tra due punti

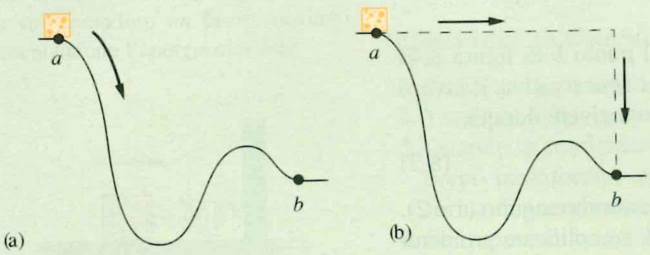



**Figura 8.5** Problema svolto 8.1. (a) Un pezzo di formaggio scivola su una superficie senza attrito dal punto $a$ al punto $b$. (b) È più facile trovare il lavoro svolto sul formaggio dalla forza di gravità seguendo il percorso tratteggiato che il cammino reale; il risultato non cambia.

### SOLUZIONE

1) *Non* possiamo utilizzare l'equazione 7.12 per calcolare il lavoro svolto dalla forza gravitazionale. Ciò perché l'angolo $\phi$ tra le direzioni della forza e dello spostamento non è costante lungo il percorso e comunque non ne conosciamo analiticamente l'andamento. Anche se lo conoscessimo, il calcolo sarebbe comunque complicato dal fatto che l'angolo $\phi$ varia continuamente lungo il percorso seguito dal formaggio.

Ma, e questa è la seconda **idea chiave**, grazie al fatto che la forza di gravità è conservativa, possiamo trovare il lavoro svolto scegliendo un altro percorso tra $a$ e $b$, un percorso che ci faciliti i calcoli. Scegliamo dunque il percorso tratteggiato nella figura 8.5b, che consiste di due segmenti retti. Lungo quello orizzontale l'angolo $\phi$ è costantemente di 90°. Anche senza conoscere la lunghezza di questo segmento, l'equazione 7.12 ci assicura che il lavoro $L_o$ svolto durante questo tratto orizzontale è nullo:

$$L_o = mgd \cos 90° = 0.$$

Lungo il segmento verticale lo spostamento è di 0,80 m e, considerato che sia $\boldsymbol{d}$ sia $\boldsymbol{F}_g$ sono verticali e diretti verso il basso, l'angolo $\phi$ è pure costante e pari a 0°. L'equazione 7.12 dunque ci fornisce il lavoro $L_v$ svolto lungo il tratto verticale tratteggiato:

$$L_v = mgd \cos 0° = (2{,}0\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}80\ \text{m})(1) = 15{,}7\ \text{J}.$$

Il lavoro complessivo svolto sul formaggio dalla forza di gravità per l'intero percorso da $a$ a $b$ lungo il percorso tratteggiato è quindi:

$$L = L_o + L_v = 0 + 15{,}7\ \text{J} \approx 16\ \text{J}.$$

Questo è pure il lavoro svolto sul formaggio per il cammino da $a$ a $b$ lungo il reale percorso seguito.

ISBN 978-88-08-18229-6



# Determinazione dell'energia potenziale

Cerchiamo ora delle espressioni che forniscano il valore dei due tipi di energia potenziale presentati in questo capitolo: quella gravitazionale e quella elastica. Dobbiamo prima però trovare una relazione generale tra una forza conservativa e l'energia potenziale associata.

Consideriamo un corpo assimilabile a una particella, che fa parte di un sistema sul quale agisce una forza conservativa $\boldsymbol{F}$. Quando la forza compie il lavoro $L$, la variazione di energia potenziale $\Delta U$ associata al sistema vale l'opposto del lavoro svolto. L'equazione 8.1 ha messo in rilievo questo fatto. Nel caso più generale in cui la forza varia durante il percorso, l'espressione del lavoro dell'equazione 7.32 è

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.5}$$

Quest'espressione fornisce il lavoro svolto dalla forza su una particella che si muove dal punto $x_i$ al punto $x_f$ variando la configurazione del sistema. (Dato che la forza è conservativa, il lavoro è lo stesso qualunque sia il percorso tra i due estremi.)

Utilizzando la (8.5) nell'espressione 8.1 si trova che la variazione di energia potenziale subita dal sistema è, in termini generali,

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.6}$$

È questa la relazione generale che cercavamo.

## Energia potenziale gravitazionale

Consideriamo ora una particella di massa $m$ che si muove verticalmente lungo l'asse $y$ (orientato positivamente verso l'alto). Se la particella si sposta dal punto $y_i$ al punto $y_f$, subisce il lavoro svolto dalla forza gravitazionale. Per trovare la variazione di energia potenziale indotta nel sistema particella-Terra, cambiamo gli estremi di integrazione nell'equazione 8.6 per adattarli all'asse $y$ e sostituiamo $F$ con $-mg$, cioè con la componente scalare della forza di gravità diretta verso il basso. Si ottiene

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,\mathrm{d}y = mg\int_{y_i}^{y_f} \mathrm{d}y = mg\big[y\big]_{y_i}^{y_f},$$

che dà

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y. \tag{8.7}$$

In fisica sono importanti solo le *variazioni* $\Delta U$ dell'energia potenziale gravitazionale (o di qualunque altro tipo di energia potenziale). Per semplificare i calcoli o l'esame del problema, tuttavia, è possibile associare un valore $U$ di energia potenziale gravitazionale a una certa configurazione del sistema, in cui la particella si trova in una determinata posizione $y$. Per fare ciò riscriviamo l'equazione 8.7 come

$$U - U_i = mg(y - y_i). \tag{8.8}$$

Poi assegniamo a $U_i$ il valore di energia potenziale gravitazionale di riferimento del sistema quando esso si trova nella **configurazione di riferimento**, con la particella nella **posizione di riferimento** $y_i$. Normalmente poniamo $U_i = 0$ e $y_i = 0$. Con questi cambiamenti l'equazione 8.8 diventa

$$U(y) = mgy. \tag{8.9}$$

L'equazione 8.9 mette in evidenza che

L'energia potenziale gravitazionale associata a un sistema particella-Terra dipende dalla posizione verticale $y$ (l'altezza o quota) della particella rispetto alla posizione di riferimento $y = 0$, e non dalla sua posizione orizzontale.

ISBN 978-88-08-18229-6

# Energia potenziale elastica

Consideriamo ora il sistema blocco-molla della figura 8.3, con il blocco ancorato all'estremità di una molla di costante elastica $k$. Durante lo spostamento del blocco dalla posizione $x_i$ alla posizione $x_f$, la forza di richiamo della molla $F = -kx$ compie lavoro sul blocco. Per trovare la corrispondente variazione di energia potenziale elastica del sistema blocco-molla, sostituiamo $-kx$ a $F(x)$ nell'equazione 8.6 ottenendo

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f},$$

e quindi

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \qquad (8.10)$$

Per associare un'energia potenziale $U$ a una data configurazione di riferimento del sistema che vede il blocco in posizione $x$, scegliamo la posizione di riferimento per il blocco $x_i = 0$, che si fa coincidere sempre con la posizione di riposo della molla, e poniamo la corrispondente energia potenziale elastica del sistema $U_i = 0$. L'equazione 8.10 pertanto diventa

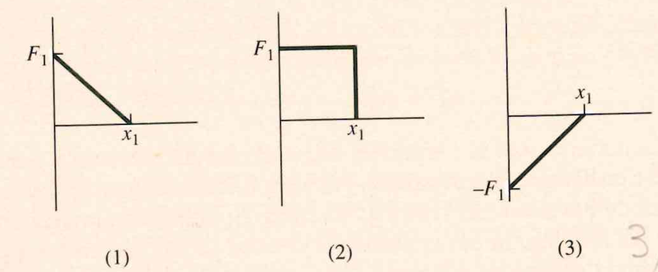
$$U - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

da cui si ottiene

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energia potenziale elastica)} \qquad (8.11)$$

## VERIFICA 2

Una particella si muove lungo l'asse $x$ da $x = 0$ a $x_1$ mentre una forza conservativa, diretta anch'essa lungo $x$, agisce sulla particella. La figura mostra la variazione del modulo della forza in funzione di $x$ per tre casi diversi. Il modulo della forza ha lo stesso valore massimo $F_1$ per tutti e tre i casi. Mettete in ordine i tre casi secondo la variazione di energia potenziale associata al moto della particella, a cominciare dal valore maggiore.




3, 1, 2

## PROBLEMA SVOLTO 8.2 Scelta del livello di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale, bradipo

Da questo esempio traiamo il seguente insegnamento: in genere si può scegliere qualunque livello come riferimento, ma una volta scelto, occorre attenervisi con coerenza. Un bradipo di massa 2,0 kg si sporge da un ramo a 5,0 m d'altezza sul suolo (fig. 8.6).

(a) Qual è l'energia potenziale iniziale $U$ del sistema bradipo-Terra se si stabilisce che $y_0$ sia nullo (1) a terra, (2) alla base di un balcone posta a 3,0 m dal suolo, (3) sul ramo e (4) 1,0 m sopra il ramo? Poniamo l'energia potenziale gravitazionale pari a zero nella posizione $y = 0$.

### SOLUZIONE

L'idea chiave è che, una volta stabilito il livello di riferimento in cui $y = 0$, con l'equazione 8.9 possiamo calcolare $U$ *rispetto a quel punto di riferimento*. Così, nel caso (1), trovandosi il bradipo inizialmente a $y = 5{,}0$ m, risulta

$$U = mgy = (2{,}0\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(5{,}0\text{ m}) = 98\text{ J}.$$

Negli altri casi i valori di $U$ saranno

(2) $U = mgy = mg\,(2{,}0\text{ m}) = 39\text{ J}$,
(3) $U = mgy = mg\,(0) = 0\text{ J}$,
(4) $U = mgy = mg\,(-1{,}0\text{ m}) = -19{,}6\text{ J} \approx -20\text{ J}$.

(b) Il bradipo cade a terra. Per ciascuna configurazione di riferimento scelta, qual è la variazione di energia potenziale del sistema bradipo–Terra dovuta alla caduta dell'animale?

**SOLUZIONE**

L'**idea chiave** ora sta nel considerare che la *variazione* di energia potenziale non dipende dalla scelta del punto di riferimento in cui $y = 0$. Dipende invece dalla variazione di altezza $\Delta y$. In tutti e quattro i casi è sempre $\Delta y = -5{,}0$ m e di conseguenza, per l'equazione 8.7, abbiamo in ogni caso

$$\Delta U = mg\,\Delta y = (2{,}0\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(-5{,}0\text{ m}) = -98\text{ J}.$$

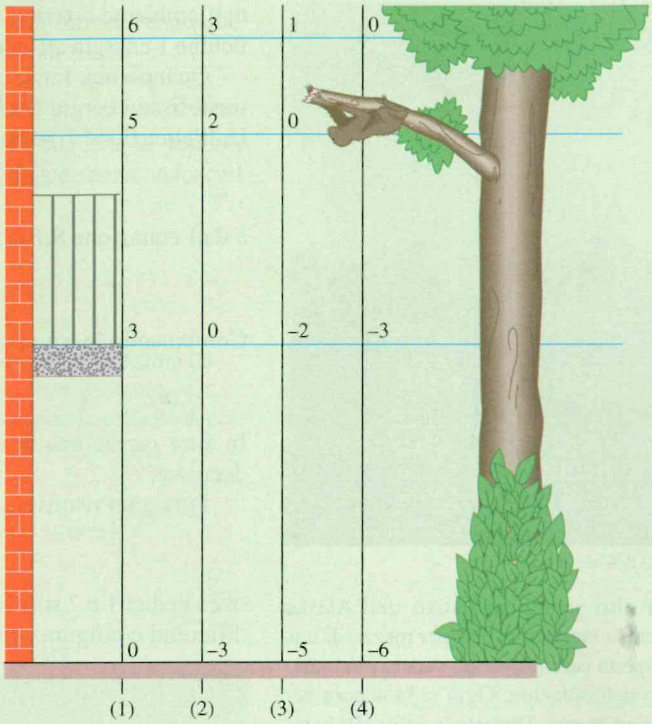



**Figura 8.6** Problema svolto 8.2. Quattro possibili scelte per l'asse $y$, ciascuna con la propria scala in metri. La scelta influisce sul valore di energia potenziale del sistema Terra-bradipo. Però le differenze di energia potenziale restano sempre le stesse.

# 8.2 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

## Obiettivi di apprendimento

*Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…*

**8.05** Riconoscere, non prima di aver chiaramente definito quali corpi formano il sistema, che l'energia meccanica di quest'ultimo è la somma delle energie cinetiche e potenziali di quei corpi.

**8.06** Applicare, per un sistema isolato in cui agiscano solo forze conservative, il principio di conservazione dell'energia meccanica per mettere in relazione le energie potenziale e cinetica iniziali a quelle di un momento successivo.

## Idee chiave

- L'energia meccanica di un sistema è la somma dell'energia cinetica $K$ e dell'energia potenziale $U$:
$$E_{\text{mec}} = K + U.$$
- Un sistema si dice isolato quando non vi sono forze esterne a provocare variazioni di energia all'interno. Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica $E_{\text{mec}}$ complessiva del sistema non può cambiare.

Tale principio di conservazione dell'energia meccanica si esprime come
$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1,$$
in cui i pedici si riferiscono a due istanti successivi durante un processo di conversione dell'energia. Il principio si può scrivere anche come
$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = 0.$$

## Conservazione dell'energia meccanica

L'**energia meccanica** $E_{\text{mec}}$ di un sistema è la somma dell'energia potenziale $U$ e dell'energia cinetica $K$ relativa ai corpi che lo compongono:

$$E_{\text{mec}} = K + U \qquad \text{(energia meccanica).} \tag{8.12}$$

In questo paragrafo esaminiamo che cosa avviene dell'energia meccanica quando entro il sistema agiscono solo forze conservative. (Più tardi considereremo anche gli effetti di forze non conservative, quali quelle di attrito.) Assumeremo anche che il sistema sia *isolato*

 ISBN 978-88-08-18229-6

.P/Wide World Photos

altri tempi un nativo dell'Alaska iiva lanciato in aria per mezzo di una perta perché potesse vedere più lonta- nella pianura. Oggi si fa ancora per /ertimento. Durante la salita del bam- io nella fotografia, si converte energia ietica in energia potenziale gravita- >nale. Quando il bambino raggiunge massima altezza il trasferimento è mpleto. Nella caduta il trasferimento inverte.

dall'ambiente esterno; vale a dire che non vi è possibilità che *forze esterne* al sistema modifichino l'energia all'interno del sistema.

Quando una forza conservativa compie il lavoro $L$ su un corpo all'interno di un sistema, trasferisce energia tra l'energia cinetica $K$ del corpo e l'energia potenziale $U$ del sistema. Dall'equazione 7.10 la variazione di energia cinetica $\Delta K$ è

$$\Delta K = L, \tag{8.13}$$

e dall'equazione 8.1 la variazione di energia potenziale $\Delta U$ è

$$\Delta U = -L. \tag{8.14}$$

Combinando le equazioni 8.13 e 8.14 otteniamo

$$\Delta K = -\Delta U. \tag{8.15}$$

In altre parole una di queste due forme di energia cresce nella stessa misura in cui l'altra decresce.

Possiamo riscrivere la (8.15) così:

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1), \tag{8.16}$$

ove i pedici 1 e 2 si riferiscono a due differenti istanti del moto della particella e quindi a due differenti configurazioni del sistema. Si può scrivere l'equazione 8.16 anche così:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad \text{(conservazione dell'energia meccanica).} \tag{8.17}$$

Detto a parole, l'equazione 8.17 si può esprimere nella forma:

$$\begin{pmatrix}\text{somma di } K \text{ e } U \text{ per} \\ \text{qualunque stato del sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{somma di } K \text{ e } U \text{ per qualsiasi} \\ \text{altro stato del sistema}\end{pmatrix},$$

purché il sistema sia isolato e sui corpi che ne fanno parte agiscano solo forze conservative. In altre parole:

> Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'energia cinetica e l'energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, l'energia meccanica $E_{mec}$ del sistema, non cambia.

Questo risultato è chiamato **principio di conservazione dell'energia meccanica**. (Da cui si intuisce anche la ragione del termine *forza conservativa.*) Con l'aiuto dell'equazione 8.15 possiamo anche esprimere il principio in altra forma:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \tag{8.18}$$

Il principio di conservazione dell'energia meccanica ci permette di risolvere problemi che sarebbe arduo risolvere usando solo le leggi di Newton.

> Quando l'energia meccanica di un sistema si conserva, possiamo mettere in relazione il totale dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un istante con quello di un altro istante, *senza dover considerare gli stati intermedi* e *senza necessità di conoscere il lavoro compiuto dalle forze coinvolte.*

La figura 8.7 mostra un caso in cui si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Nell'oscillazione di un pendolo l'energia del sistema pendolo-Terra viene trasferita avanti e indietro tra l'energia cinetica $K$ e l'energia potenziale $U$, mantenendo costante la somma $K + U$. Se ci viene data l'energia potenziale gravitazionale quando il pendolo si trova nel punto più alto (fig. 8.7c), possiamo trovare la sua energia cinetica nel punto più basso (fig. 8.7e) mediante l'equazione 8.17.

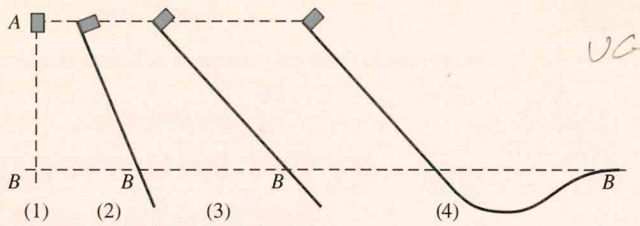
Per esempio, scegliamo il punto inferiore come posizione di riferimento e poniamo la corrispondente energia potenziale gravitazionale $U_2 = 0$. Supponiamo che l'energia potenziale al punto più alto $U_1$ valga 20 J rispetto alla posizione di riferimento. Dato che in questo punto il pendolo momentaneamente si arresta, l'energia cinetica è $K_1 = 0$. Introducendo questi valori nell'equazione 8.17 otteniamo l'energia cinetica $K_2$ nel punto più basso:

$$K_2 + 0 = 0 + 20 \text{ J} \qquad \text{ovvero} \qquad K_2 = 20 \text{ J}.$$

È da notare che abbiamo ottenuto il risultato senza badare a che cosa succede al pendolo negli stati intermedi tra i punti inferiore e superiore (come in figura 8.7d), e senza conoscere il lavoro svolto da alcuna forza coinvolta nel moto.

## VERIFICA 3

La figura qui a fianco mostra quattro modalità di discesa di un blocco inizialmente fermo (le rampe sono prive di attrito). (a) Ordinate i casi secondo l'energia cinetica posseduta dal blocco nei punti $B$, a cominciare dalla maggiore. (b) Ordinate i casi secondo la velocità del blocco nel punto $B$, a cominciare dalla maggiore.




UGUALI

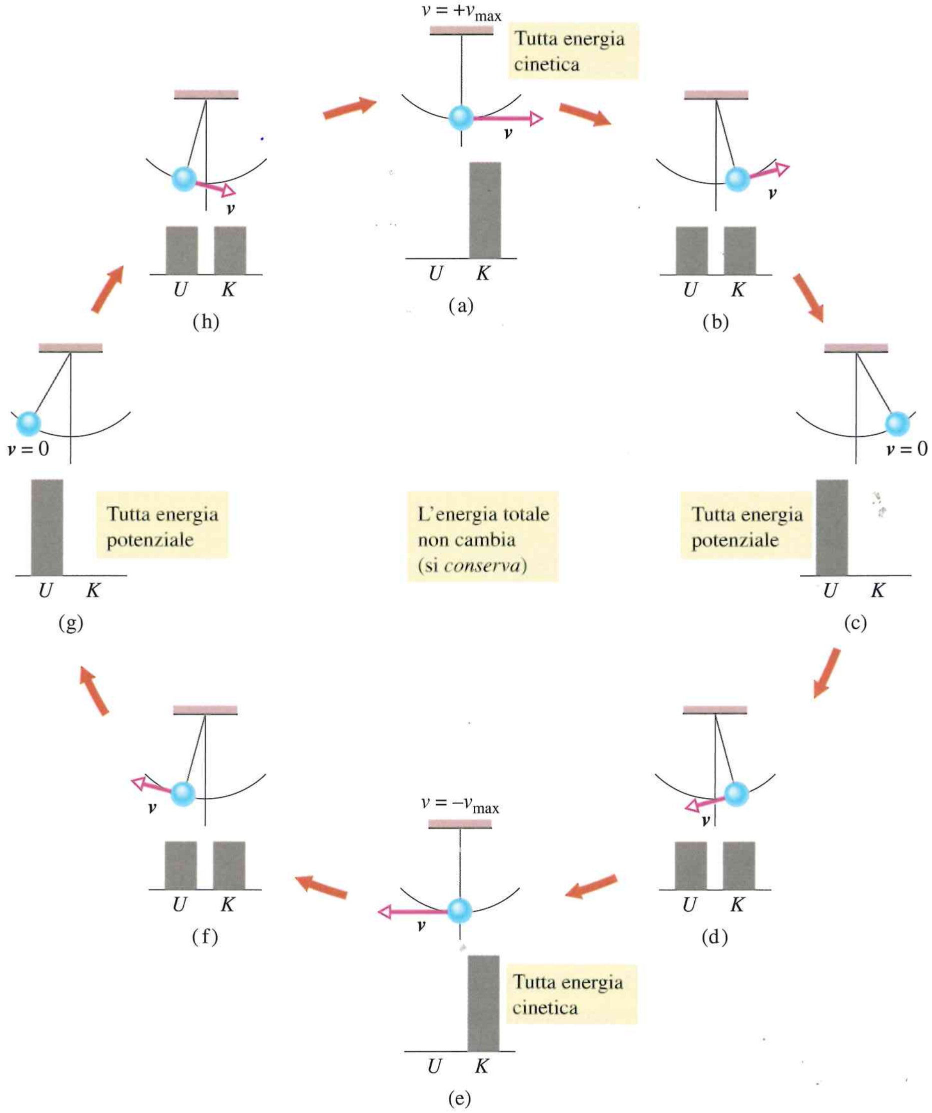



**Figura 8.7** Un pendolo, avente la massa tutta concentrata in un peso all'estremità inferiore, oscilla avanti e indietro. È rappresentato schematicamente un ciclo completo di oscillazione. Durante il ciclo i valori dell'energia cinetica e potenziale del sistema pendolo-Terra variano al variare dell'altezza del piombo, ma l'energia meccanica $E_{mec}$ del sistema rimane costante. Negli stadi (a) e (e) l'energia è tutta cinetica: il piombo ha la velocità massima e passa per il punto più basso della sua corsa. In (c) e (g) invece il blocco ha velocità nulla nella posizione più alta, e il sistema pendolo-Terra possiede la massima energia potenziale gravitazionale. Negli stadi intermedi (b), (d), (f) e (h) metà dell'energia è cinetica e metà potenziale. Se nell'oscillazione si manifestasse una forza di attrito nel perno che sostiene il pendolo, o una forza di resistenza da parte dell'aria, la $E_{mec}$ sarebbe dissipata e il pendolo alla fine si fermerebbe.

 ISBN 978-88-08-18229-6

## ROBLEMA SVOLTO 8.3 Conservazione dell'energia meccanica, scivolo d'acqua

grande vantaggio di utilizzare il principio di conservazione dell'energia al posto della seconda legge di Newton consiste nel poter saltare ettamente dallo stato iniziale a quello finale senza dover considerare ti gli stati intermedi del moto. Eccone un esempio. Nella figura 8.8 un mbino di massa $m$ è lasciato andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo tridimensionale, a un'altezza $h = 8{,}5$ m sopra il livello della piscina. A che velocità starà scivolando quando arriverà in acqua? Supponia che lo scivolo, sul quale scorre continuamente dell'acqua, sia privo attrito.

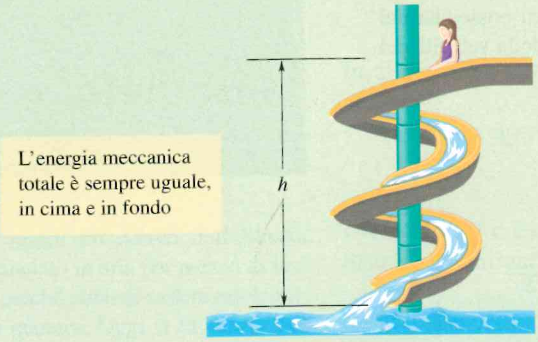



**Figura 8.8** Problema svolto 8.3. Un bambino scivola nella piscina su un *toboga* «lubrificato» ad acqua percorrendo un dislivello $h$.

### OLUZIONE

idea chiave sta nel capire subito che non possiamo trovare la velocità nale del bambino attraverso la conoscenza della sua accelerazione, ome avremmo fatto nei capitoli precedenti, per il semplice fatto che on conosciamo la pendenza dello scivolo. Dato però che la velocità è gata all'energia cinetica, possiamo ricorrere al principio di conservazione dell'energia meccanica, evitando così di dover conoscere tutti i ettagli sulla pendenza e la forma dello scivolo. La seconda idea chiave sta el ricordare che l'energia meccanica si conserva solo se il sistema è olato e le variazioni di energia sono provocate da forze conservative. ontrolliamo se è il nostro caso.

***Forze***. Sul bambino agiscono due forze. La *forza gravitazionale* è conservativa. La *forza normale* esercitata dallo scivolo non compie lavoro sul bambino perché la sua direzione in ogni punto della discesa è sempre perpendicolare alla direzione del moto.

***Sistema***. Dato che l'unica forza che compie lavoro sul bambino è quella gravitazionale, prendiamo come sistema la coppia di corpi bambino-Terra, sistema che è isolato.

Concludiamo dunque che solo una forza conservativa compie lavoro in un sistema isolato e di conseguenza siamo autorizzati ad applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Sia $E_{\text{mec,i}}$ l'energia meccanica del bambino alla partenza in cima allo scivolo ed $E_{\text{mec,f}}$ la sua energia meccanica all'arrivo in acqua. Dal principio di conservazione abbiamo

$$E_{\text{mec,f}} = E_{\text{mec,i}}. \tag{8.19}$$

Suddividendo l'energia meccanica nelle sue due forme possiamo scrivere

$$K_f + U_f = K_i + U_i, \tag{8.20}$$

ovvero

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i\,.$$

Dividendo per $m$, massa del bambino, e risolvendo rispetto a $v_f$ troviamo

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(y_i - y_f).$$

Ponendo $v_i = 0$ e $y_i - y_f = h$ si ottiene la velocità finale:

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(8{,}5\ \text{m})} = 13\ \text{m/s}\,.$$

Questa è la stessa velocità che il bambino avrebbe raggiunto cadendo verticalmente per 8,5 m. In realtà, qualche forza di attrito interverrebbe senza dubbio a rallentare la velocità del bambino sullo scivolo.

La risoluzione diretta di questo problema con le sole leggi di Newton sarebbe piuttosto laboriosa: assai più agevole diventa sfruttando il principio di conservazione dell'energia. Se però fosse stato richiesto il tempo impiegato dal bambino per arrivare in acqua, il metodo qui utilizzato non sarebbe servito: avremmo dovuto conoscere la forma dello scivolo, e le cose si sarebbero complicate assai.

# 3.3 COME LEGGERE UNA CURVA DELL'ENERGIA POTENZIALE

## )biettivi di apprendimento

*)opo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…*

.07 Determinare la forza agente su una particella quando sia data la sua energia potenziale come funzione della sua posizione $x$.

.08 Determinare la forza agente su una particella quando sia dato il grafico della sua energia potenziale in funzione di $x$.

.09 Sovrapporre su un grafico dell'energia potenziale in funzione di $x$ una retta che rappresenti l'energia meccanica della particella e stabilire la sua energia cinetica per qualunque valore di $x$ richiesto.

8.10 Utilizzare, per una particella in moto lungo l'asse $x$, un grafico dell'energia potenziale per quell'asse e il principio di conservazione dell'energia meccanica per mettere in relazione i valori di energia relativi a una posizione rispetto a un'altra.

8.11 Identificare su un grafico dell'energia potenziale i punti di inversione e le regioni non ammesse per la particella a causa di limitazioni energetiche.

8.12 Spiegare cosa siano l'equilibrio indifferente, quello stabile e quello instabile.

**Idee chiave**

- Conoscendo la funzione energia potenziale $U(x)$ per un sistema ove su una particella agisca solo una forza unidimensionale $F(x)$, si può trovare la forza con la seguente espressione:
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$
- Dato un grafico di $U(x)$, per ogni valore di $x$ la forza $F(x)$ è l'opposto della pendenza della curva in corrispondenza di tale punto e l'energia cinetica della particella è data da
$$K(x) = E_{mec} - U(x),$$
ove $E_{mec}$ rappresenta l'energia meccanica del sistema.
- Il punto di inversione è un punto $x$ in corrispondenza del quale la particella inverte il suo moto (in tal punto $K = 0$).
- Una particella è in equilibrio nei punti in cui la pendenza della curva $U(x)$ è nulla [in tali punti $F(x) = 0$].

# Come leggere una curva dell'energia potenziale

Consideriamo ancora una particella come parte di un sistema sul quale agisce una forza conservativa. Supponiamo che sia costretta a muoversi lungo l'asse $x$. Vogliamo descrivere graficamente la funzione energia potenziale $U(x)$ associata a tale forza e il lavoro che essa compie, per poi considerare come sia possibile risalire dal grafico alla forza e all'energia cinetica della particella. Prima di esaminare questo grafico, occorre tuttavia conoscere un'altra relazione.

## Ricerca analitica di una forza

L'equazione 8.6 ci insegna a trovare la differenza di energia potenziale $\Delta U$ tra due punti in una situazione unidimensionale partendo dalla forza $F(x)$. Ma ora dobbiamo operare in senso inverso: partendo dall'energia potenziale $U(x)$ dobbiamo trovare la forza $F(x)$.

Nel moto unidimensionale il lavoro $L$ sviluppato da una forza che agisce su una particella nel corso del suo spostamento $\Delta x$ è dato da $F(x)\,\Delta x$. Possiamo perciò riscrivere la (8.1) come

$$\Delta U(x) = -L = -F(x)\,\Delta x, \tag{8.21}$$

che risolta rispetto a $F(x)$ porta, al limite, alla forma differenziale:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(moto unidimensionale)}, \tag{8.22}$$

che è la relazione cercata.

Possiamo verificare questa espressione ponendo $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, che è la funzione dell'energia potenziale elastica per la forza di una molla. L'equazione 8.22 diventa allora, com'era da aspettarsi, $F(x) = -kx$, che è la legge di Hooke. Analogamente possiamo inserire nella (8.22) la $U(x) = mgx$, che rappresenta l'energia potenziale gravitazionale di una particella di massa $m$ collocata a quota $x$ sopra la superficie terrestre, ottenendo $F = -mg$, che rappresenta la forza gravitazionale agente sulla particella.

## La curva dell'energia potenziale

Nella figura 8.9a troviamo il grafico della funzione $U(x)$, energia potenziale di una particella in moto unidimensionale, su cui agisce una forza conservativa $F(x)$. Applicando l'equazione 8.22 possiamo trovare facilmente la forza $F(x)$ che agisce sulla particella ricavando, per via grafica, la pendenza della curva $U(x)$ in diversi punti. La figura 8.9b rappresenta la curva così ottenuta della $F(x)$.

ISBN 978-88-08-18229-6

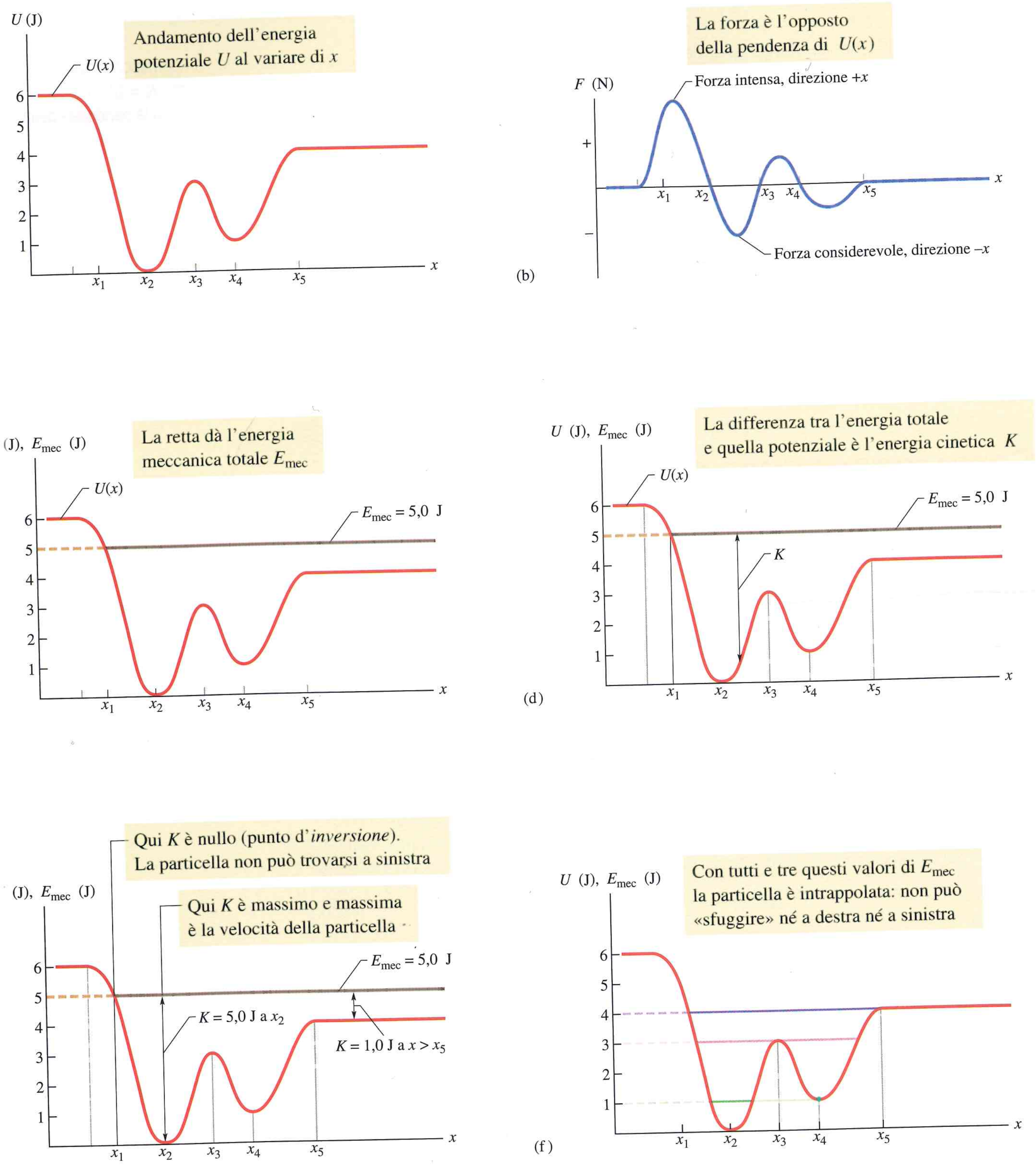



**Figura 8.9** (a) Una curva di $U(x)$, la funzione energia potenziale per un sistema contenente una particella costretta a muoversi lungo l'asse $x$. Non c'è attrito e quindi l'energia meccanica si conserva. (b) Una curva di $F(x)$, la forza che agisce sulla particella, ricavata dalla curva dell'energia potenziale attraverso la rilevazione della sua pendenza in diversi punti. (c)-(e) Come determinare l'energia cinetica. (f) La stessa curva $U(x)$ di (a), con l'indicazione di tre possibili valori di $E_{mec}$.

## Punti di inversione

In assenza di attrito, l'energia meccanica $E_{mec}$ della particella ha un valore costante dato dalla

$$U(x) + K(x) = E_{mec}. \tag{8.23}$$

ISBN 978-88-08-18229-6



in cui $K(x)$ è la *funzione energia cinetica* della particella, ossia l'espressione del valore $K$ dell'energia cinetica della particella in funzione della sua posizione $x$. Possiamo riscrivere la (8.23) così:

$$K(x) = E_{mec} - U(x). \tag{8.24}$$

Supponiamo che $E_{mec}$ (di valore costante!) sia per esempio 5,0 J, valore rappresentato nella figura 8.9c dalla retta parallela all'asse $x$ a distanza pari a 5 unità, sulla scala delle ordinate.

Secondo l'equazione 8.24, conoscendo la $U(x)$ possiamo ricavare l'energia cinetica $K$ per qualsiasi posizione $x$ della particella: basta sottrarre da $E_{mec}$ il valore della $U$ corrispondente a quella posizione. Per esempio, se la particella si trova in qualsiasi posizione a destra di $x_5$, troviamo $K$ = 1,0 J. Il massimo valore di $K$ (= 5,0 J) si ha per $x = x_2$, e il minimo (= 0 J) in $x_1$.

Ma poiché $K$, che è proporzionale a $v^2$, non può mai diventare negativa, ecco che la particella non potrà mai passare alla sinistra di $x_1$, dove la quantità $E_{mec} - U$ diventerebbe negativa. Quando la particella si dirige da $x_2$ verso $x_1$ la sua energia cinetica $K$ diminuisce (la particella rallenta), fino ad azzerarsi in $x_1$, dove la particella si arresta.

Si noti che quando la particella arriva in $x_1$ la forza, data dall'equazione 8.22, è positiva. Ciò implica che la particella non può rimanere ferma in $x_1$, ma comincia immediatamente a muoversi verso destra, invertendo il suo moto precedente. Perciò $x_1$ è chiamato **punto di inversione**, una posizione cioè in cui l'energia cinetica è nulla (dato che $U = E_{mec}$) e il moto della particella cambia verso. A destra di $x_1$ non si trova più alcun punto di inversione (in cui si abbia $K = 0$): quando la particella si dirige verso valori crescenti di $x$, continuerà a muoversi indefinitamente verso destra.

## Punti di equilibrio

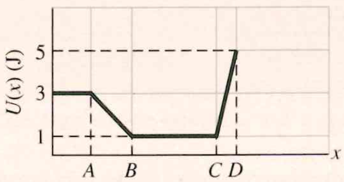
La figura 8.9f presenta altri tre valori della $E_{mec}$, sovrapposti al grafico della medesima energia potenziale $U(x)$. Vediamo come potrebbero influire sulla situazione. Per $E_{mec}$ = 4,0 J (linea violetta), il punto d'inversione si sposta da $x_1$ a un punto situato fra $x_1$ e $x_2$. Vediamo inoltre che in ogni punto a destra di $x_5$ l'energia meccanica della particella è uguale alla sua energia potenziale: si annulla quindi sia l'energia cinetica, sia la forza che agisce sulla particella (eq. 8.22): non può essere che ferma. Lo stato di una particella che si trova in questa posizione si definisce di **equilibrio indifferente**. (Una biglia posata sul piano orizzontale di un tavolo si trova in questo stato.)

Se $E_{mec}$ = 3,0 J (linea rosa), vi sono due punti di inversione: uno fra $x_1$ e $x_2$, l'altro fra $x_4$ e $x_5$. Nel punto $x_3$ inoltre si ha $K = 0$: se la particella si trova esattamente in quel punto, anche la forza è nulla e la particella può rimanere ferma. Ma uno spostamento anche minimo in entrambe le direzioni farebbe sorgere una forza diversa da zero diretta nello stesso senso, facendo proseguire la particella nel moto appena iniziato. Lo stato di una particella che si trovi in questa posizione si definisce di **equilibrio instabile**. (Una biglia collocata sopra una sfera è in questa situazione.)

Vediamo ora il comportamento della particella per $E_{mec}$ = 1,0 J (linea verde). Se la piazziamo in $x_4$, vi rimane bloccata. Non può spostarsi da sola a destra o a sinistra perché per farlo avrebbe bisogno di un'energia cinetica negativa. Se proviamo a spostarla di poco a destra o a sinistra, si manifesta una forza di ripristino che la riporta in $x_4$. Lo stato di una particella che si trova in questa posizione si definisce di **equilibrio stabile**. (Una biglia posata sul fondo di una ciotola emisferica è in questa situazione.) Se collochiamo la particella nella *buca di potenziale* concava centrata su $x_2$, può ancora spostarsi verso destra o verso sinistra di un certo tratto entro i due punti di inversione, ma senza mai arrivare in $x_1$ o in $x_3$.

### VERIFICA 4

La figura descrive la funzione energia potenziale $U(x)$ per un sistema in cui una particella è in moto unidimensionale. (a) Ordinate in modo decrescente le regioni $AB$, $BC$, $CD$ secondo il modulo della forza che agisce sulla particella. (b) Che direzione presenta la forza quando la particella si trova nella regione $AB$?



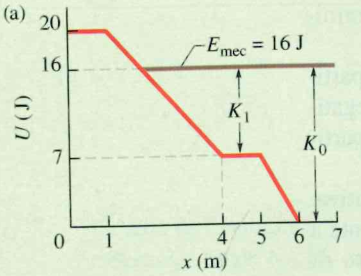

(a) C~~A~~, AB, BC
(b) ~~D~~iroz. posit., verso dx

ISBN 978-88-08-18229-6

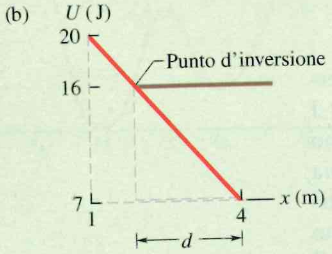
## ROBLEMA SVOLTO 8.4 Come leggere un grafico dell'energia potenziale

a particella di massa 2,00 kg si muove lungo l'asse $x$ mentre su di a agisce una forza conservativa nella medesima direzione. L'energia enziale $U(x)$ associata alla forza è diagrammata nella figura 8.10a. e a dire che ivi è dato il valore di $U$ per ogni posizione $x$ della partila compresa tra $x = 0$ e $x = 7{,}00$ m. In corrispondenza di $x = 6{,}50$ m la ocità della particella è $\vec{v}_0 = (-4{,}00 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$.

Dalla figura 8.10a ricavare la velocità scalare della particella per $x = 4{,}5$




L'energia cinetica è la differenza tra l'energia totale e l'energia potenziale




Al punto d'inversione l'energia cinetica è nulla (la particella è ferma)

**Figura 8.10** Problema svolto 8.4. (a) Grafico dell'energia potenziale $U$ in funzione della posizione $x$. (b) Un tratto ingrandito della curva usato per stabilire dove la particella inverte il moto.

### SOLUZIONE

$K = \frac{1}{2} m v^2$

1) L'energia cinetica è data dall'equazione 7.1. (2) Dato che sulla particella gisce solo una forza conservativa, l'energia meccanica $E_{mec} = K + U$ si onserva durante il suo moto. (3) Di conseguenza, su un grafico di $U(x)$, ome quello di figura 8.10a, l'energia cinetica è rappresentata dalla differenza tra $E_{mec}$ e $U$.

*Calcoli*. In corrispondenza di $x = 6{,}5$ m la particella ha energia cinetica

$$K_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}00 \text{ kg})(4{,}00 \text{ m/s})^2 = 16{,}0 \text{ J}.$$

Giacché in quel punto l'energia potenziale è $U = 0$, l'energia meccanica è

$$E_{mec} = K_0 + U_0 = 16{,}0 \text{ J} + 0 = 16{,}0 \text{ J}.$$

Questo valore di $E_{mec}$ è tracciato sul grafico di figura 8.10a come una linea orizzontale. Sullo stesso grafico leggiamo che, in corrispondenza di $x = 4{,}5$ m, l'energia potenziale è $U_1 = 7{,}0$ J. l'energia cinetica $K_1$ non è altro che la differenza tra $E_{mec}$ e $U_1$:

$$K_1 = E_{mec} - U_1 = 16{,}0 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J} = 9{,}0 \text{ J}.$$

Considerato che $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, si trova

$$v_1 = 3{,}0 \text{ m/s}.$$

(b) Dove è collocato il punto d'inversione per la particella?

### SOLUZIONE

Il punto d'inversione è quello in cui la forza arresta e inverte il cammino della particella. Vale a dire che in quel punto la particella presenta $v = 0$ e quindi $K = 0$.

***Calcoli***. Dato che $K$ è uguale alla differenza tra $E_{mec}$ e $U$, l'energia cinetica $K$ si annulla laddove in figura 8.10a la curva di $U$ assume lo stesso valore di $E_{mec}$. Poiché in quel tratto l'andamento di $U$ è lineare (vedi fig. 8.10b), possiamo costruire un triangolo rettangolo come mostrato in figura e scrivere una proporzione tra i lati dei triangoli rettangoli:

$$\frac{16 - 7{,}0}{d} = \frac{20 - 7{,}0}{4{,}0 - 1{,}0},$$

da cui ricaviamo $d = 2{,}08$ m. Quindi il punto d'inversione si trova a

$$x = 4{,}0 \text{ m} - d = 1{,}9 \text{ m}.$$

(c) Calcolare la forza agente sulla particella quando questa si trova nel tratto $1{,}9 \text{ m} < x < 4{,}0$ m.

### SOLUZIONE

La forza è data da $F(x) = -dU(x)/dx$ (eq. 8.22) ed è pari all'opposto della pendenza sul grafico di $U(x)$.

***Calcoli***. Dalla funzione tracciata in figura 8.10b si vede che, nell'intervallo $1{,}0 \text{ m} < x < 4{,}0$ m, la forza vale

$$F = -\frac{20 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J}}{1{,}0 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m}} = 4{,}3 \text{ N}.$$

Pertanto la forza ha modulo di 4,3 N ed è rivolta nel verso positivo dell'asse $x$. Un risultato coerente osservando che la particella, inizialmente in moto verso sinistra, viene arrestata dalla forza e respinta indietro verso destra.

ISBN 978-88-08-18229-6



# 8.4 LAVORO SVOLTO SU UN SISTEMA DA UNA FORZA ESTERNA

## Obiettivi di apprendimento

*Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…*

8.13 Determinare le variazioni di energia cinetica e potenziale quando un sistema subisce lavoro per opera di forze esterne senza che intervengano attriti.

8.14 Mettere in relazione il lavoro svolto su un sistema da una forza esterna in presenza di attriti con le variazioni di energia cinetica, potenziale e termica.

## Idee chiave

- Il lavoro $L$ svolto da una forza esterna su un sistema è l'energia ceduta al o assorbita dal sistema stesso.
- Quando le forze esterne sono molteplici, l'energia ceduta o assorbita corrisponde al loro lavoro totale netto.
- In assenza di attriti il lavoro svolto su un sistema equivale alla variazione di energia meccanica $\Delta E_{\text{mec}}$:

$$L = \Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U.$$

- In presenza di una forza d'attrito dinamica che agisce entro il sistema, varia l'energia termica $E_{\text{th}}$ del sistema. Si tratta di una forma di energia connessa con il moto casuale di atomi e molecole entro la struttura del sistema. Il lavoro svolto sul sistema è allora

$$L = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}}.$$

- La variazione $\Delta E_{\text{th}}$ è legata al modulo $f_k$ della forza d'attrito e al modulo $d$ dello spostamento causato dalla forza esterna:

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d.$$

## Lavoro svolto su un sistema da una forza esterna

Nel capitolo 7 abbiamo definito il lavoro come l'energia trasferita *a* o *da* un corpo per mezzo di una forza che agisce su di esso. Possiamo ora estendere la definizione a forze esterne che agiscono su un sistema di corpi.

> Il lavoro è l'energia trasferita *a* o *da* un sistema per mezzo di una forza esterna che agisce su di esso.

La figura 8.11a simboleggia un lavoro positivo (trasferimento di energia *a favore* del sistema), mentre la figura 8.11b simboleggia un lavoro negativo (trasferimento di energia *a spese* del sistema). Quando sul sistema agisce più di una forza, l'energia trasferita *al* o *dal* sistema è il *lavoro totale*.

Questi trasferimenti sono come i trasferimenti di denaro *a* o *da* un conto bancario. Se il sistema consiste di una sola particella o corpo puntiforme, il lavoro svolto sul sistema da una forza può variarne solo l'energia cinetica, come abbiamo visto nel capitolo 7. Il principio è espresso dal teorema dell'energia cinetica (eq. 7.10, $\Delta K = L$); come dire che una particella possiede un solo «conto» energetico, chiamato energia cinetica. Le forze esterne possono prelevare o depositare energia su questo conto solamente. Quando invece il sistema è più complicato, la forza esterna può variare l'energia anche sotto altre forme (come l'energia potenziale); un sistema più complesso cioè può possedere più di un conto energetico.

Cerchiamo ora analoghi princìpi per questi sistemi, separandoli in due tipi fondamentali: sistemi che coinvolgono l'attrito e sistemi che non lo coinvolgono.

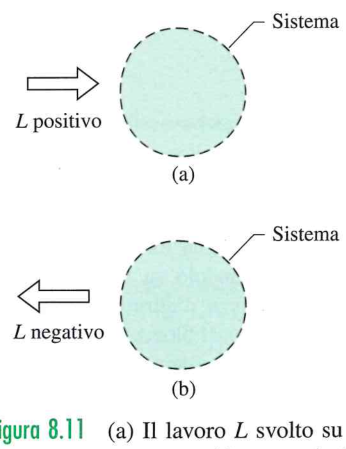



Figura 8.11 (a) Il lavoro $L$ svolto su un sistema qualsiasi è positivo quando l'energia viene trasferita al sistema. (b) È negativo quando l'energia viene sottratta al sistema.

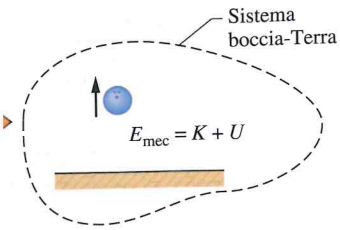
### Sistemi senza coinvolgimento di attrito

In una partita a bocce, se dovete bocciare «al volo» una boccia lontana, dopo aver afferrato la vostra boccia, la lanciate imprimendole una traiettoria che inizialmente sale per poi ridiscendere a parabola sul bersaglio. Durante il tratto in salita, la forza che avete applicato alla palla compie naturalmente lavoro: è cioè una forza esterna che trasferisce energia, ma a quale sistema?

Per rispondere vediamo di individuare le forme di energia che subiscono un cambiamento. Vi è certamente una variazione $\Delta K$ nell'energia cinetica della boccia; inoltre, considerato che la distanza tra la boccia e la Terra aumenta in quel tratto, vi è una variazione $\Delta U$ dell'e-

 ISBN 978-88-08-18229-6

a forza di sollevamento conferisce nergia cinetica ed energia potenziale




ıra 8.12 Sul sistema costituito da una ːcia e dalla Terra, un lavoro positivo $L$ ıvoca una variazione $\Delta E_{mec}$ dell'ener- meccanica del sistema, una variazio- $\Delta K$ dell'energia cinetica della boccia na variazione $\Delta U$ dell'energia poten- le gravitazionale del sistema.

nergia potenziale gravitazionale del sistema boccia-Terra. La vostra forza dunque è una forza esterna che compie lavoro su questo sistema e il lavoro equivale a

$$L = \Delta K + \Delta U, \tag{8.25}$$

ovvero

$$L = \Delta E_{mec} \quad \text{(lavoro svolto sul sistema, senza attrito)}, \tag{8.26}$$

ove $\Delta E_{mec}$ rappresenta la variazione di energia meccanica del sistema. Queste due equazioni, illustrate nella figura 8.12, sono espressioni equivalenti per il caso di lavoro svolto su un sistema da una forza esterna in assenza di attrito.

## Sistemi con coinvolgimento di attrito

La figura 8.13a mostra un blocco di massa $m$ e velocità iniziale $v_0$ che scivola su un pavimento. Una forza costante orizzontale $\boldsymbol{F}$ lo tira in direzione dell'asse $x$ aumentandone la velocità fino alla velocità $\boldsymbol{v}$ per uno spostamento $\boldsymbol{d}$. Una forza d'attrito dinamico $\boldsymbol{f}_k$ esplicata dal pavimento agisce sul blocco. Scegliamo dapprima il blocco come nostro sistema e applichiamogli la seconda legge di Newton. Limitandoci alle componenti scalari lungo l'asse $x$:

$$F - f_k = ma. \tag{8.27}$$

Dato che le forze sono costanti, lo è anche l'accelerazione. Possiamo quindi servirci dell'equazione 2.16 nel seguente modo:

$$v^2 = v_0^2 + 2ad.$$

Risolvendola rispetto ad $a$ e sostituendola nella (8.27), si ottiene

$$Fd = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + f_k d, \tag{8.28}$$

ovvero, dato che i primi due addendi a secondo membro equivalgono a $\Delta K$,

$$Fd = \Delta K + f_k d. \tag{8.29}$$

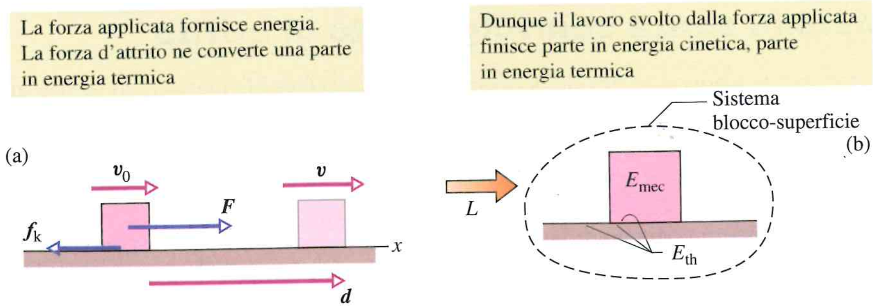
In un caso più generale (immaginiamo ad esempio che il blocco salga su una rampa) può esserci anche variazione di energia potenziale. Per includere questa possibilità, generalizziamo l'equazione 8.27 scrivendo

$$Fd = \Delta E_{mec} + f_k d. \tag{8.30}$$

Sappiamo per esperienza che il blocco e il tratto di pavimento percorso dal blocco si scaldano durante il moto. Vedremo nel capitolo 16 che la temperatura di un corpo è legata all'energia termica del corpo $E_{th}$ (energia associata al moto casuale di atomi e molecole nel corpo). In questo caso l'energia termica del blocco e del pavimento aumenta perché (1) esiste una forza d'attrito tra di essi e (2) scivolano l'uno contro l'altro. Ricordiamo che l'attrito è dovuto al fenomeno delle saldature a freddo tra le due superfici. Allo strisciare del blocco sul pavimento lo scivolamento provoca ripetuti strappi e risaldature tra blocco e pavimento, a causa del riscaldarsi di entrambi. Il fenomeno aumenta insomma la loro energia termica $E_{th}$.

Attraverso gli esperimenti troviamo che l'incremento di energia termica $E_{th}$ equivale al prodotto dei moduli $f_k$ e $d$:

$$\Delta E_{th} = f_k d \quad \text{(incremento di energia termica per strofinamento)}. \tag{8.31}$$




gura 8.13 (a) Una forza $\boldsymbol{F}$ agisce sul locco trascinandolo su una superficie ıentre una forza d'attrito dinamico si ppone al moto. Il blocco ha velocità $\boldsymbol{v}_0$ ll'inizio dello spostamento $\boldsymbol{d}$, e velocità $\boldsymbol{v}$ alla fine. (b) La forza $\boldsymbol{F}$ esercita un ıvoro positivo sul sistema blocco-superficie, provocando una variazione $\Delta E_{mec}$ ell'energia meccanica del blocco e una ariazione $\Delta E_{th}$ dell'energia termica di ılocco e superficie.

Possiamo ora riscrivere l'equazione 8.30 come

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th}. \quad (8.32)$$

$Fd$ equivale al lavoro svolto dalla forza esterna $\boldsymbol{F}$ (energia trasferita dalla forza al sistema); ma di quale sistema si tratta (a chi viene trasferita energia)? Per rispondere cerchiamo di individuare le energie soggette a variazione. L'energia meccanica del blocco cambia, e così pure le energie termiche del blocco e del pavimento. Quindi $\boldsymbol{F}$ agisce sul sistema costituito da blocco-pavimento.

$$L = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \quad \text{(lavoro svolto sul sistema, con attrito).} \quad (8.33)$$

Questa equazione, illustrata nella figura 8.13b, si riferisce al lavoro compiuto su un sistema da una forza esterna nel caso sia coinvolta una forza d'attrito.

## VERIFICA 5

In tre esperimenti si spinge un blocco applicandogli una forza orizzontale e facendolo scivolare su un pavimento *con* attrito come in figura 8.13a. Nella tabellina che segue sono dati la forza $F$ in modulo e la conseguente variazione di velocità del blocco per i tre casi. La distanza $d$ percorsa è comunque la stessa. Mettete in ordine i tre esperimenti secondo i valori decrescenti di variazione di energia termica del blocco e pavimento.

| Esperimento | $F$ | Effetto sulla velocità del blocco |
|---|---|---|
| a | 5,0 N | diminuisce |
| b | 7,0 N | rimane costante |
| c | 8,0 N | aumenta |

Si deve conoscere di quanto varia l'en. cinetica

## PROBLEMA SVOLTO 8.5 Lavoro, attrito, variazione di energia termica, cassa di cavoli

Uno scaricatore di porto spinge una cassa di cavoli (massa totale $m = 14$ kg) su un terreno di cemento con una forza orizzontale costante $\boldsymbol{F}$ di intensità 40 N. In uno spostamento rettilineo di modulo $d = 0{,}50$ m la velocità della cassa diminuisce da $v_0 = 0{,}60$ m/s a $v = 0{,}20$ m/s.

(a) Quanto lavoro svolge la forza e su quale sistema?

### SOLUZIONE

Poiché la forza $\boldsymbol{F}$ applicata è costante, possiamo calcolare il lavoro che compie mediante l'equazione 7.7, $L = Fd\cos\phi$.

***Calcoli***. Introducendo i dati e osservando che la forza $\boldsymbol{F}$ è parallela allo spostamento $\boldsymbol{d}$, si ottiene

$$L = Fd\cos\phi = (40\ \text{N})(0{,}50\ \text{m})\cos 0° = 20\ \text{J}.$$

***Ragionamento***. Per individuare il sistema su cui si compie lavoro esaminiamo le variazioni di energia. Dato che la velocità della cassa varia, varierà anche la sua energia cinetica. Esiste una forza d'attrito tra cassa e terreno e quindi una variazione di energia termica? Si noti che le direzioni di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{v}$ sono uguali. È un'idea chiave osservare che, se non vi fosse attrito, la forza e l'accelerazione impressa dovrebbero *aumentare* la velocità della cassa. Dato che al contrario essa *rallenta*, deve essere presente una forza d'attrito e quindi una variazione $\Delta E_{th}$ di energia termica della cassa e del terreno. Il sistema su cui si compie lavoro è pertanto costituito dall'insieme cassa-terreno.

(b) Quant'è la variazione di energia termica della cassa e del terreno?

### SOLUZIONE

L'idea chiave qui sta nel correlare l'energia termica al lavoro svolto dalla forza $\boldsymbol{F}$ tramite il principio espresso nell'equazione 8.33, valida in presenza di attrito:

$$L = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th}. \quad (8.34)$$

Il lavoro ci è noto dalla parte (a). $\Delta E_{mec}$ si riduce a una variazione di energia cinetica perché non avviene alcuna variazione di energia potenziale, e quindi

$$\Delta E_{mec} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Sostituendo nella (8.34) e risolvendo rispetto a $\Delta E_{th}$, troviamo

$$\begin{aligned}\Delta E_{th} &= L - (\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) = L - \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \\ &= 20\ \text{J} - \tfrac{1}{2}(14\ \text{kg})[(0{,}20\ \text{m/s})^2 - (0{,}60\ \text{m/s})^2] = \\ &= 22{,}2\ \text{J} \approx 22\ \text{J}.\end{aligned}$$

Senza approfondire l'analisi, non possiamo sapere quanta di questa energia termica finisce nella cassa e quanta nel pavimento. Ne conosciamo solo la quantità totale.

 ISBN 978-88-08-18229-6

# .5 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

## biettivi di apprendimento

*opo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…*

15 Applicare, per un sistema isolato cioè privo di forze esterne, il principio di conservazione dell'energia per mettere in relazione l'energia totale iniziale (di tutti i generi) con l'energia totale in un successivo istante.

16 Mettere in relazione il lavoro svolto su un sistema non isolato da una forza esterna netta con le variazioni dei diversi tipi di energia entro il sistema.

8.17 Applicare la relazione tra la potenza media, l'energia scambiata e l'intervallo di tempo impiegato per lo scambio.

8.18 Determinare la potenza istantanea in qualsiasi istante quando sia data l'energia trasferita in funzione del tempo, sotto forma sia di equazione sia di diagramma.

## dee chiave

- L'energia totale $E$ di un sistema, somma della sua energia meccanica e delle sue energie interne (inclusa quella termica), può variare solo se viene ceduta o assorbita energia dall'esterno. Questa osservazione sperimentale è conosciuta come principio di conservazione dell'energia.
- Se $L$ è il lavoro svolto sul sistema, allora

$$L = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}.$$

Quando il sistema è isolato e cioè $L = 0$, l'espressione si riduce a

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$

e

$$E_{\text{mec},2} = E_{\text{mec},1} - \Delta E_{\text{th}} - \Delta E_{\text{int}},$$

in cui i pedici 1 e 2 si riferiscono a due istanti diversi.

- La potenza dissipata da una forza è il rapporto temporale con cui tale forza converte energia. Se $\Delta E$ è l'energia trasferita da una forza in un intervallo di tempo $\Delta t$, la potenza media dissipata da quella forza è

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

- La potenza istantanea è

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Su un grafico che descrive l'energia $E$ in funzione del tempo $t$ la potenza è in ogni istante rappresentata dalla pendenza della curva.

## Conservazione dell'energia

Abbiamo presentato finora diverse situazioni in cui viene trasferita dell'energia tra corpi e sistemi, proprio come si trasferisce denaro da un conto corrente a un altro. In tutti i casi abbiamo sempre verificato che si poteva sempre rendere conto dell'energia coinvolta, spiegando da dove proveniva e dove veniva trasferita; ciò induce a pensare che l'energia non può apparire o scomparire come per magia. In linguaggio più formale abbiamo sempre assunto (correttamente) che l'energia obbedisce al **principio di conservazione dell'energia**, che riguarda l'**energia totale** $E$ di un sistema. Per "totale" intendiamo la somma dell'energia meccanica, dell'energia termica e di ogni altra forma di *energia interna* distinguibile dall'energia termica (di cui non abbiamo ancora discusso). Il principio afferma:

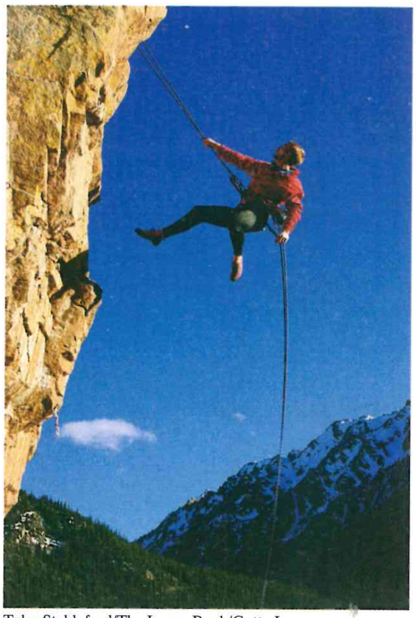
> L'energia totale $E$ di un sistema può variare solo se viene trasferita energia *dal di fuori* o *al di fuori* del sistema.

L'unica modalità di trasferimento di energia che abbiamo considerato finora è il lavoro $L$ svolto su un sistema. Limitandoci quindi alle cognizioni acquisite finora, possiamo scrivere il principio così:

$$L = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}, \tag{8.35}$$

dove il primo termine si riferisce alla variazione di energia meccanica del sistema, il secondo alla variazione di energia termica e il terzo alla variazione di altre forme di energia interna. Comprese nelle variazioni di energia meccanica sono le variazioni di energia cinetica e quelle di energia potenziale (elastica, gravitazionale, o di qualsiasi altro tipo).

Il principio di conservazione dell'energia *non* è stato dedotto da altre leggi fondamentali della fisica. Esso è piuttosto il risultato di innumerevoli esperimenti, cui a tutt'oggi non è mai stata trovata eccezione. Detto più semplicemente, l'energia non si crea né si distrugge.



Tyler Stableford/The Image Bank/Getty Images

**Figura 8.14** Per scendere, il climber deve trasferire parte dell'energia potenziale gravitazionale di un sistema costituito da lui stesso, la sua attrezzatura e la Terra. Ha avvolto la corda attorno ai moschettoni in modo che la corda faccia attrito sugli anelli dei moschettoni. Questo gli consente di trasformare la maggior parte dell'energia in energia termica della corda e del metallo anziché nella sua energia cinetica.

## Sistema isolato

Quando parliamo di un sistema isolato dall'ambiente esterno, vogliamo dire che non possono avvenire trasferimenti di energia tra il sistema e l'esterno. In questo caso il principio di conservazione dell'energia diventa:

> L'energia totale $E$ di un sistema isolato si conserva, ossia non può cambiare.

*Entro* un sistema isolato possono avvenire molti trasferimenti di energia, per esempio tra energia cinetica ed energia potenziale o tra energia cinetica ed energia termica. Ma la somma totale di tutte le forme di energia all'interno del sistema non cambia. Ancora, l'energia non si crea né si distrugge.

Come esempio, prendendo spunto dall'immagine di figura 8.14, consideriamo la Terra, il climber e la sua attrezzatura come un solo sistema. Quando l'atleta scende lungo la parete cambiando la configurazione del sistema, ha necessità di controllare il trasferimento di energia dall'energia potenziale del sistema (non può farla sparire!). Egli lascia quindi che una parte venga trasformata nella sua energia cinetica di discesa (direttamente legata alla sua velocità), ma ovviamente non gradisce che questa diventi eccessiva. Di conseguenza, mediante il forzato percorso scorsoio che la corda è costretta a subire attorno ai moschettoni, la forza di attrito tra questi e la corda dissipa la maggior parte dell'energia meccanica del sistema in modo controllato, trasformandola lentamente in energia termica di corda e moschettoni. L'energia totale del sistema rocciatore-attrezzatura-Terra resta tuttavia sempre invariata durante la discesa.

Se un sistema è isolato, il principio di conservazione dell'energia si può scrivere in due modi. Possiamo da un lato porre $L = 0$ nell'equazione 8.35 e scrivere

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = 0 \qquad \text{(sistema isolato)}, \tag{8.36}$$

oppure possiamo scrivere $\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec},2} - E_{\text{mec},1}$, in cui i pedici 1 e 2 si riferiscono a due momenti diversi, ad esempio prima e dopo un certo evento. L'equazione 8.36 diventa allora

$$E_{\text{mec},2} = E_{\text{mec},1} - \Delta E_{\text{th}} - \Delta E_{\text{int}}. \tag{8.37}$$

L'equazione 8.37 afferma:

> In un sistema isolato possiamo mettere in relazione tutte le energie relative a un certo istante con tutte le energie di un altro istante qualsiasi, *senza necessità di considerare le energie degli stati intermedi*.

Questa affermazione può rivelarsi utilissima nel risolvere problemi sui sistemi isolati, quando occorre trovare una relazione tra le energie prima e dopo un certo processo.

Nel paragrafo 8.2 abbiamo discusso un caso speciale di un sistema isolato, precisamente un caso in cui all'interno del sistema non agiscono forze non conservative (come le forze d'attrito). In quel caso sia $\Delta E_{\text{th}}$ sia $\Delta E_{\text{int}}$ sono nulli e così l'equazione 8.37 si riduce alla (8.18). In altre parole l'energia meccanica di un sistema isolato si conserva quando al suo interno non agiscono forze non conservative.

## Forze esterne e trasferimenti interni di energia

Una forza esterna può modificare l'energia cinetica o l'energia potenziale di un corpo senza compiere lavoro su di esso, cioè senza trasferirgli energia. In questo caso la forza è responsabile invece della conversione di energia da una forma a un'altra entro lo stesso corpo.

 ISBN 978-88-08-18229-6

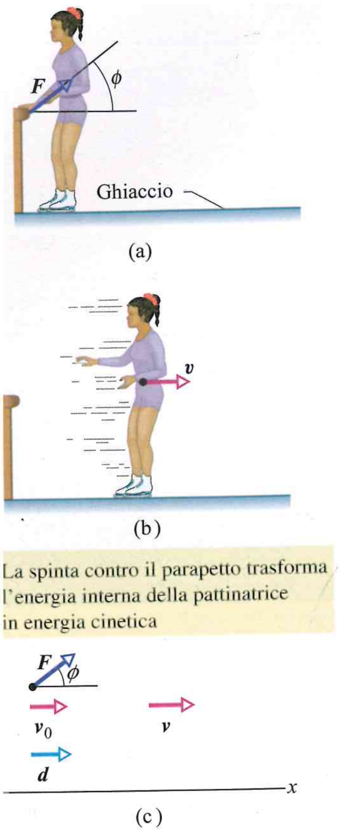



**Figura 8.15** (a) Una pattinatrice si spinge via allontanandosi da un parapetto. Questo esercita su di lei una forza $\boldsymbol{F}$. (b) Per effetto della spinta, la pattinatrice scivola via sul ghiaccio alla velocità $\boldsymbol{v}$. (c) La forza esterna $\boldsymbol{F}$ agisce sul centro di massa e forma un angolo $\phi$ con il piano orizzontale. Per l'azione della sua componente orizzontale, quando il centro di massa subisce lo spostamento $d$, la velocità passa da $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{v}$.

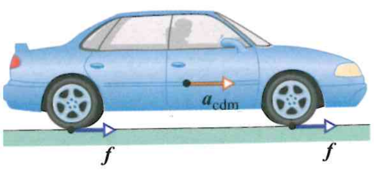



**Figura 8.16** Un'automobile a quattro ruote motrici accelera verso destra con partenza da fermo. La strada esercita quattro forze di attrito (due soltanto sono visibili nella figura) sulla parte inferiore degli pneumatici. Queste quattro forze, nel loro insieme, costituiscono la forza esterna netta $\boldsymbol{F}$ che agisce sull'auto.

La figura 8.15 mostra un esempio. Una pattinatrice inizialmente ferma si spinge via dalla balaustra pattinando all'indietro sul ghiaccio (figg. 8.15a e 8.15b). La sua energia cinetica cresce grazie a una forza esterna $\boldsymbol{F}$ applicata dalla balaustra. Questa forza però non trasferisce energia dalla balaustra alla pattinatrice. La forza quindi non compie lavoro su di lei. Piuttosto l'incremento di energia cinetica proviene da una conversione interna di energia biochimica dei suoi muscoli.

La figura 8.16 illustra un altro esempio. Un motore accresce la velocità di un'auto a quattro ruote motrici. In tale accelerazione il motore costringe le ruote a spingere indietro premendo sull'asfalto. Questa spinta suscita forze d'attrito $\boldsymbol{f}$ che agiscono su ciascuno pneumatico e sono dirette in avanti. La forza esterna complessiva $\boldsymbol{F}$, somma di tali forze d'attrito, che la pavimentazione applica all'auto, ne causa l'accelerazione con incremento di energia cinetica. Tuttavia $\boldsymbol{F}$ non trasferisce energia dalla strada all'automobile e pertanto non compie lavoro su quest'ultima. L'energia cinetica della macchina cresce piuttosto per effetto dei trasferimenti interni di energia che originano dall'energia chimica del combustibile.

In situazioni come le due descritte possiamo talvolta esprimere la relazione tra la forza esterna $\boldsymbol{F}$ che agisce sul corpo e la sua variazione di energia meccanica, se siamo in grado di semplificare il processo. Torniamo all'esempio della pattinatrice. Quando si spinge all'indietro premendo sulla balaustra per una distanza $d$ (fig. 8.15c), possiamo semplificare ipotizzando che, nell'accrescere la sua velocità da $v_0 = 0$ a $v$, l'accelerazione sia costante. Il che equivale ad assumere che la forza abbia intensità $F$ e angolo $\phi$ costanti. Possiamo poi considerare la pattinatrice, dopo la spinta, come un corpo puntiforme e ignorare le modifiche delle caratteristiche fisiologiche intervenute, come per esempio il riscaldamento interno che il suo movimento muscolare le ha prodotto. A questo punto possiamo applicare l'equazione 7.5 per scrivere

$$K - K_0 = (F\cos\phi)d,$$

ovvero

$$\Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8.38}$$

Se l'evento comporta anche una variazione di quota dell'oggetto, possiamo includere la variazione di energia potenziale gravitazionale scrivendo

$$\Delta U + \Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8.39}$$

La forza che compare a secondo membro non svolge lavoro sull'oggetto, ma è responsabile delle variazioni energetiche in evidenza al primo membro.

## Potenza

Ora che abbiamo visto come l'energia possa essere trasferita da una forma all'altra, possiamo estendere la definizione di potenza data nel paragrafo 7.6. In senso più generale la potenza $P$ è la rapidità con la quale l'energia viene convertita per mezzo di una forza da una forma all'altra. Se si trasforma un'energia $\Delta E$ in un intervallo di tempo $\Delta t$, la **potenza media** dovuta alla forza è

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8.40}$$

Similmente la **potenza istantanea** dovuta alla forza è

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{8.41}$$

## PROBLEMA SVOLTO 8.6 Diverse energie in un parco acquatico

La figura 8.17 mostra uno scivolo d'acqua in cui un bob viene proiettato da una molla su una prima sezione orizzontale e poi scende fino al suolo sempre sostenuto da un velo d'acqua che riduce l'attrito a un valore trascurabile. Quando giunge a valle viene frenato progressivamente nella vasca fino ad arrestarsi. La massa totale del bob coi passeggeri è $m = 200$ kg, la compressione iniziale della molla è $d = 5{,}00$ m, la sua costante elastica è $k = 3{,}20 \cdot 10^3$ N/m, l'altezza iniziale è $h = 35{,}0$ m e il coefficiente d'attrito dinamico nel tratto finale in vasca è $\mu_k = 0{,}800$. A che distanza $L$ si arresta il bob scivolando sul tratto finale in acqua?

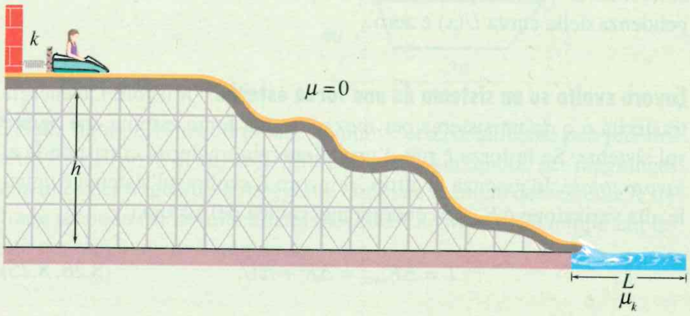



**Figura 8.17** Problema svolto 8.6. Uno scivolo in un parco acquatico con partenza a spinta.

### SOLUZIONE

Prima di prendere in mano la calcolatrice dobbiamo esaminare tutte le forze coinvolte e determinare quale sia l'àmbito del nostro sistema. Solo a quel punto potremo decidere quali equazioni ci servono. Siamo in presenza di un sistema isolato (ricorreremmo al principio di conservazione) o di un sistema con un forza esterna che compie lavoro (la nostra equazione legherebbe il lavoro alla variazione di energia del sistema)?

***Forze***. La forza normale agente sul bob da parte dello scivolo non compie lavoro perché è sempre perpendicolare alla direzione del moto. La forza di gravità compie lavoro sul bob e, essendo conservativa, è associabile a un'energia potenziale. Sotto la spinta della molla una forza elastica compie lavoro sul bob convertendo energia potenziale elastica della molla in energia cinetica del bob. La forza della molla spinge anche contro il suo sostegno rigido sul muro. Nel tratto finale, giacché vi è attrito tra il bob e l'acqua della vasca, la frizione tra il bob e l'acqua provoca un aumento delle loro energie termiche.

***Sistema***. Prendiamo dunque un sistema che contenga tutti i corpi che interagiscono: bob, fondo dello scivolo, molla, Terra e muro rigido. Di conseguenza, dato che tutti gli scambi energetici avvengono *all'interno* del sistema, il sistema è *isolato*. L'energia totale non può cambiare. L'equazione da utilizzare non è quindi quella relativa a una forza esterna che compie lavoro sul sistema. Piuttosto, è quella del principio di conservazione dell'energia. Scriviamola nella forma dell'equazione 8.37:

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_{th}. \tag{8.42}$$

È come l'equazione di un conto corrente: il saldo finale è uguale al saldo iniziale *meno* l'importo uscito per un prelievo. L'energia meccanica finale è uguale a quella iniziale *meno* la quantità sottratta dall'attrito. L'energia non scompare né compare magicamente.

***Calcoli***. Ora che sappiamo quale equazione utilizzare, dobbiamo calcolare la distanza $L$. Usiamo il pedice 1 per indicare le condizioni iniziali del bob contro la molla compressa e il pedice 2 per quelle finali in cui il bob è fermo dopo l'arresto. In entrambi gli stati l'energia meccanica del sistema è la somma di tutte le energie potenziali e cinetiche.

Abbiamo due tipi di energia potenziale: quella elastica $U_e$ associata alla molla compressa e quella gravitazionale $U_g$ associata alla quota cui si trova il bob. Per quest'ultima prendiamo come riferimento zero il livello del suolo. Di conseguenza il bob è inizialmente all'altezza $y = h$ e alla fine è all'altezza $y = 0$.

Allo stato iniziale, con bob fermo in alto e molla compressa, l'energia è

$$\begin{aligned} E_{mec,1} &= K_1 + U_{e1} + U_{g1} = \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Allo stato finale, quando la molla è a riposo e il bob si trova di nuovo fermo ma in basso, l'energia meccanica finale è

$$E_{mec,2} = K_2 + U_{e2} + U_{g2} = 0 + 0 + 0. \tag{8.44}$$

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alla variazione di energia termica $\Delta E_{th}$ del bob e della vasca d'acqua. In base all'equazione 8.31 possiamo sostituire $f_k L$ (ove $L$ rappresenta la distanza percorsa) a $\Delta E_{th}$. L'equazione 6.2 ci dice che $f_k = \mu_k F_N$ ove $F_N$ è la forza normale. In questo caso, essendo il moto del bob orizzontale nel tratto di frenata, $F_N = mg$ (le due forze sono uguali in modulo e si bilanciano). In definitiva la quantità di energia sottratta a quella meccanica e convertita in termica è

$$\Delta E_{th} = \mu_k mgL. \tag{8.45}$$

Detto per inciso, non possiamo sapere, senza indagini più approfondite, quanta di questa energia termica finisce in acqua e quanta nel bob: ne conosciamo solo la quantità totale.

Introducendo ora nella (8.42) i risultati delle tre successive equazioni, otteniamo

$$0 = \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh - \mu_k mgL.$$

e dunque

$$\begin{aligned} L &= \frac{kd^2}{2\mu_k mg} + \frac{h}{\mu_k} = \\ &= \frac{(3{,}20 \cdot 10^3\ \text{N/m})(5{,}00\ \text{m})^2}{2(0{,}800)(200\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)} + \frac{35\ \text{m}}{0{,}800} = \\ &= 69{,}3\ \text{m}. \end{aligned}$$

Si noti quanto è algebricamente semplice la soluzione. Definendo con cura il sistema e potendo considerarlo isolato, ci basta applicare il principio di conservazione. Possiamo cioè mettere in relazione lo stato finale con quello iniziale senza occuparci degli stati intermedi. In particolare non ci interessano le asperità del percorso intermedio con le sue cunette e i suoi dossi. Se avessimo dovuto applicare la seconda legge di Newton, avremmo dovuto conoscere tutti i dettagli del tragitto e affrontare calcoli molto più complicati.