Geometria 1

IV appello d'esame

Anno accademico 2021-2022
7/7/2022

1) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori
$$w_1 = (1, 1, 1, 2), \quad w_2 = (3, 0, 0, -1).$$
Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Determinare $\dim W$, $\dim U$ e una base di U.
   (b) Determinare la dimensione e una base di $U + W$ e di $U \cap W$.

2) È dato il sistema lineare dipendente dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 1 \\ y + 2w + z = 0 \\ x + y + \lambda w = 0 \\ \lambda y + 2\lambda w + \lambda^2 z = 0. \end{cases}$$
Determinare per quali valori di λ è compatibile e risolverlo nei casi in cui ha più di una soluzione.

3) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo $f = L_A$ con
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Dimostrare che f è diagonalizzabile.
   (b) Determinare gli autovalori e una base per ciascun autospazio.
   (c) Se possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, per il prodotto scalare canonico, rispetto a cui la matrice di f è diagonale.

4) Sia
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Esiste $N \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $\det(MN) = 4$? Se sì, dare un esempio. Se no, spiegare perché.