Geometria 1

V appello d'esame

Anno accademico 2021-2022

6/9/2022

1) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Verificare che è compatibile, descrivere l'insieme delle soluzioni e determinare l'espressione della sua soluzione generale.

2) Sia

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \mu & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

matrice che dipende dal parametro reale μ. Determinare i valori di μ tali che A_μ sia invertibile. Calcolare l'inversa di A_2. Per i valori di μ tali che A_μ non è invertibile, trovare una combinazione lineare nulla non banale delle righe della matrice.

3) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica. Trovare gli autovalori di f, le loro molteplicità algebriche e geometriche, e basi per gli autospazi. Dire se f è diagonalizzabile.

4) Sia

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice reale. Verificare che $L(M)$ è autoaggiunto, dove $\mathbb{R}^3$ è dotato del prodotto scalare canonico.

Trovare una base ortonormale di autovettori.

Scrivere una matrice diagonale D simile ad M e una matrice ortogonale S tali che $S^{-1}MS = D$.