**Esame di Analisi matematica I : esercizi**
**A.a. 2021-2022 appello autunnale**

**COGNOME** ______________________ **NOME** ______________________

**N. Matricola** ______________________ **Anno di corso** ______________________

**Corso di** **S. CUCCAGNA**

**ESERCIZIO N. 1.** Si calcoli al variare di $a > 0$ e per $[x]$ la parte intera di $x$, il valore del limite

$$L_a := \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x+e^{x^2}) - \int_x^{2x}[t]dt}{\int_x^{2x}\tanh(t^a)\frac{1+t^a}{1+t}dt}.$$

abbiamo $\lg(1+x+e^{x^2}) = \lg\left(e^{x^2}(1+e^{-x^2}x+e^{-x^2})\right) =$

$= x^2 + \lg(1+e^{-x^2}x+e^{-x^2}) = x^2 + e^{-x^2}x + o(e^{-x^2}) =$

$= x^2 + O(x^{-n}) \quad \forall n.$

$\int_x^{2x}[t]\,dt = \int_x^{2x}(t+[t]-t)\,dt = \int_x^{2x} t\,dt - \int_x^{2x}(t-[t])\,dt$

$= \left.\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x}(t-[t])\,dt = \frac{3}{2}x^2 - \int_x^{2x}(t-[t])\,dt$, dove

$0 < \int_x^{2x}(t-[t])\,dt < \int_x^{2x}dt = x = o(x^2)$

cioè numeratore $= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2}(1+o(1))$

Abbiamo $\operatorname{th}(t^a) = 1 + O(t^{-n}) \quad \forall n$

$\frac{1+t^a}{1+t} = t^{a-1}\frac{1+t^{-a}}{1+t^{-1}} = t^{a-1}(1+t^{-a})(1-t^{-1}+o(t^{-1})) =$

$= t^{a-1}(1+t^{-a}-t^{-1}+o(t^{-1}))$

denom $= \int_x^{2x} t^{a-1}(1+o(1))\,dt = \left.\frac{t^a}{a}\right]_x^{2x} + o(x^a)$

$= \frac{x^a}{a}(1+o(1))$. Pertanto abbiamo

$L_a = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^a}{a}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{a}{2}x^{2-a} \begin{cases} -\infty & \text{per } 0<a<2 \\ -\frac{a}{2} & \text{per } a=2 \\ 0 & \text{per } a>2 \end{cases}$

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{1+t}{1+t^2} dt$$

finito qui per errore.

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

l'integranda si comporta come $\frac{1}{t}$ all'infinito. Pertanto

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Notare che $f(x) = \lg(|x|)(1+o(1))$ per $x\to\pm\infty$

- stabilire dove $f$ cresce e dove decresce;

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1+x}{1+x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0, -1$ i punti critici, $x = 0$ un flesso, $x = -1$ punto di minimo assoluto

- determinare il numero degli zeri di $f$;

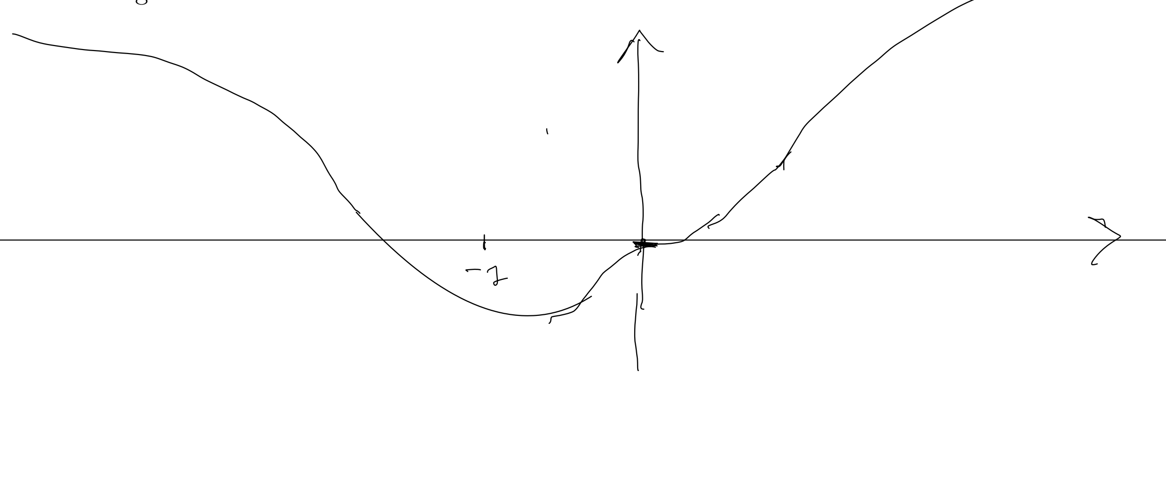
$f$ decrescente in $(-\infty, -1]$, crescente in $[-1, +\infty)$

$f(-1) = \min f < f(0) = 0$. Significa che c'è uno zero in $(-\infty, -1)$ e $0$ è l'altro zero.

- stabilire se ci sono rette asintotiche;

Non ci sono rette asintotiche perché $f(x) \sim \lg(|x|)(1+o(1))$ all'infinito

- tracciare il grafico.



**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+2t+2t^2+t^3}dt & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{1+x^2}-1-x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$f(x) = \sqrt{1+x^2}+|x|-1 \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$

$\frac{1-t}{(1+t)^2+t^2(1+t)} = \frac{1-t}{(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t+t^2}$ $\quad A = \frac{1-t}{1+t+t^2}\Big|_{t=-1} = 2$, $B=-2$ (qui $A+B=0$)

$= \frac{2(1+\cancel{t}+\cancel{t^2})-2t(\cancel{1}+\cancel{t})+C(1+t)}{\text{denom}} = \frac{2+C(1+t)}{\text{denom}} \Rightarrow C=-1$. Allora $f(x) = 2\lg(1+x) - \int_0^x \frac{2t+1}{1+t+t^2}dt$

$f(x) = 2\lg(1+x) - \lg(1+x+x^2) = \lg\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} \lg 1 = 0$

- si calcoli $f'(x)$ dove é definito e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+2x+2x^2+x^3} & \text{per } x>0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

$f'_d(0) = 1$, $f'_s(0) = -1$

$f'(x)<0$ per $x<0$, $f'(x)>0$ per $0<x<1$, $f'(1)=0$ e $f'(x)<0$ per $x>1$

- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

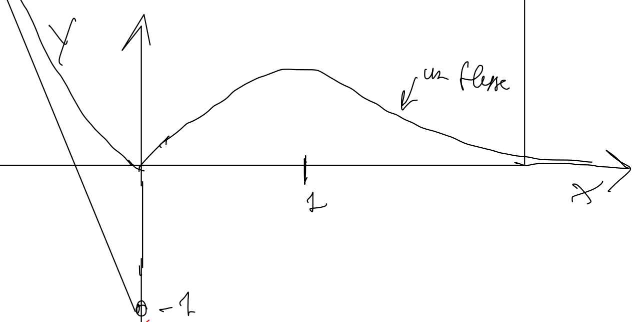
per $x>0$, $f''(x) = \frac{-(1+2x+2x^2+x^3)-(1-x)(2+4x+3x^2)}{(1+2x+2x^2+x^3)^2} = \frac{-1-\cancel{2x}-2x^2-x^3-2-4x-3x^2+\cancel{2x}+4x^2+3x^3}{(\dots)^2} =$

$= \frac{-3-4x-x^2+2x^3}{(\dots)^3}$. Notare che $f''(x)<0$ per $x<1$ ma che $f''(x)>0$ per $x>>1$, quindi c'e' un flesso

per $x<0$ $\quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$

- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico.

$y=0$ e' un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$




$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{x} =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1-\frac{1}{x}\right) = -2$

$\sqrt{1+x^2}-x-1+2x = -x(1+x^{-2})^{\frac{1}{2}}-x-1+2x = -x(1+\frac{1}{2}x^{-2}+o(x^{-2}))-x-1+2x$

$= \cancel{-2x}-\frac{1}{2}x^{-1}+o(x^{-2})-1+\cancel{2x} \xrightarrow{x\to-\infty} -1$ $\quad y=-2x-1$ retta asintotica a $-\infty$

**ESERCIZIO N. 4.** Calcolare le derivate di ogni ordine in 0 di $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

$$e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{t^{2j}}{j!} + o\left(t^{2n}\right) \quad \text{per } t \to 0$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \int_x^{2x} t^{2j}\,dt + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!\,(2j+1)} \left. t^{2j+1}\right]_x^{2x}$$

$$+ o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!\,(2j+1)} \left(2^{2j+1} - 1\right) x^{2j+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{è } P_{2n+1}$$

$$f^{(2j)}(0) = 0 \quad \forall j \quad \text{mentre} \quad \frac{f^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} = \frac{(-1)^j \left(2^{2j+1} - 1\right)}{j!\,(2j+1)}$$

da cui si ottiene $f^{(2j+1)} = \dfrac{(-1)^j \left(2^{2j+1} - 1\right)(2j)!}{j!}$

**ESERCIZIO N. 5.** Calcolare $\int_0^1 \arctan(x) x^2 dx$.

$$\int_0^1 \arctan x \; x^2\,dx = \int_0^1 \arctan x \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \left.\frac{x^3}{3} \arctan x\right]_0^1$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{1}{3} \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx - \left.\frac{1}{2}\lg(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg 2$$

Quindi $\int_0^1 \arctan x \; x^2\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lg 2.$