

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 13.09.22

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2021/2022

Esercizio 1

1. Dare la definizione di trasformazioni canoniche e fornire un esempio di tali trasformazioni, dimostrando che è canonica [3pt].
2. Definire il flusso Hamiltoniano [1,5pt].
3. Dimostrare che il flusso Hamiltoniano è una trasformazione canonica [3pt].
4. Enunciare il teorema di Liouville e dimostrarlo [2,5pt].
5. Si consideri il moto

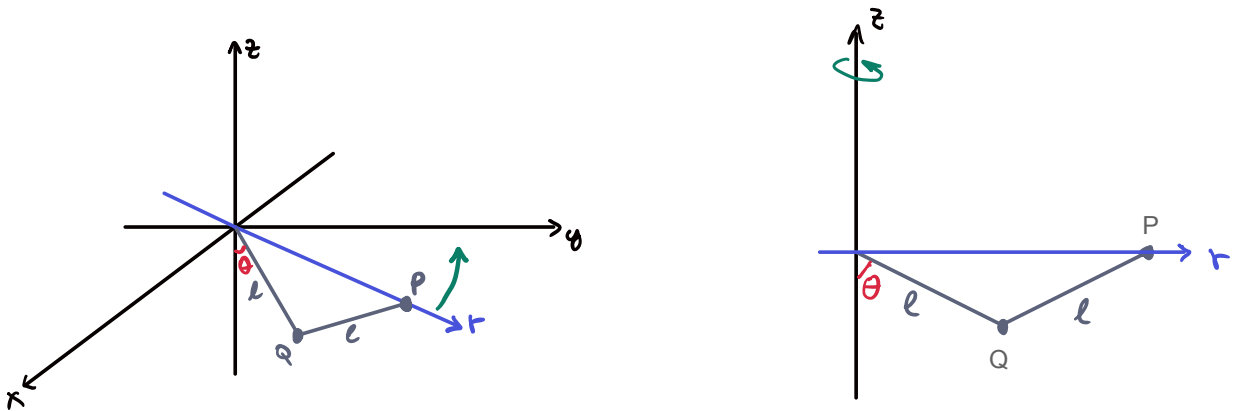
$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^0 \cos t - p_2^0 \sin t \\ p_1^0 \sin t + p_2^0 \cos t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^0 \cos t - q_2^0 \sin t \\ q_1^0 \sin t + q_2^0 \cos t \end{pmatrix}$$

Scrivere quale Hamiltoniana genera questo flusso, giustificando la risposta [3pt].

6. *Facoltativo: Dato un sistema a uno grado di libertà, dimostrare che la seguente trasformazione di coordinate è canonica: $p = \alpha \tilde{q} + \ln \tilde{p}$, $q = \tilde{p} e^{\alpha \tilde{q}} - \frac{\tilde{p}}{\alpha}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ [1pt].*

Esercizio 2

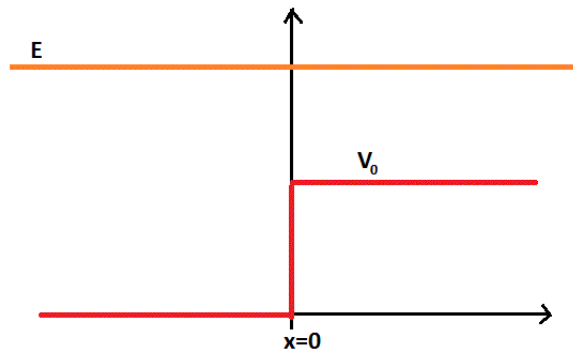
Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura, in cui due punti materiali P e Q di ugual massa m sono vincolati nel seguente modo: P giace sulla retta r , Q giace sul piano rz a distanza fissa ℓ dall'origine ed ℓ da P . La retta r ruota di moto uniforme nel piano xy (l'asse z è l'asse di rotazione) con velocità angolare costante Ω . Sul sistema agisce la forza di gravità.



1. Scrivere la Lagrangiana $L(\theta, \dot{\theta})$ del sistema, usando come coordinata libera l'angolo θ in figura [2,5pt].
2. Scrivere l'equazione di Lagrange del sistema nella forma normale [1pt].
3. Linearizzare l'equazione di Lagrange trovata al punto 2 attorno a $\theta = 0$ e risolvere l'equazione lineare risultante [2pt].
4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla Lagrangiana $L(\theta, \dot{\theta})$ e discuterne la stabilità [3pt].
5. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili [1,5pt].
6. *Facoltativo: Si consideri lo stesso sistema, in cui però la retta r è libera di ruotare nel piano xy con coordinata libera φ . Usando l'eventuale coordinata ciclica, calcolare la lagrangiana ridotta e l'equazione di Lagrange del problema unidimensionale risultante [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in presenza di un gradino di potenziale di altezza V_0 , come in figura. Si consideri il caso in cui l'energia è $E > V_0$.



1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due regioni a potenziale costante [1pt].
2. Si determini la soluzione totale, imponendo le opportune condizioni di raccordo, e assumendo che la particella arrivi da sinistra [4pt].
3. Le soluzioni sono stati fisici del sistema? Se no, scrivere una generica soluzione dell'equazione di Schrödinger per questo sistema che sia uno stato fisico [1pt].
4. Calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione [1pt].