Calcolo delle Probabilità
Corso Progredito

Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche e Attuariali
Università degli Studi di Trieste

Calcolo delle Probabilità

- Argomenti:
  - Spazi di probabilità
  - Variabili aleatorie
  - Indipendenza
  - Speranza condizionata
  - Teoremi limite
  - Processi stocastici

Calcolo delle Probabilità

- Testi per il corso
  - *Probability and Random Processes*, G. Grimmett, D. Stirzaker, OUP, 3a edizione, 2001
    $\rightsquigarrow$ di base, molto ampio, numerosi esercizi
  - *Probability Essentials*, J. Jacod, P. Protter, Springer, 2a edizione, 2004
    $\rightsquigarrow$ conciso ma molto preciso
  - *Probability and Measure*, P. Billingsley, Wiley, 3a edizione, 1995
    $\rightsquigarrow$ molto ampio e matematicamente preciso, avanzato

Calcolo delle Probabilità

- Modello matematico per la descrizione e valutazione dell'incertezza
  - approccio assiomatico basato sulla *Teoria della Misura*
  - eventi $\equiv$ insiemi, probabilità $\equiv$ misura
  - approccio non "costruttivo"

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 1) $\Omega =$ insieme di possibili risultati di un esperimento
  - elementi (risultati): $\omega \in \Omega$
  - $\omega =$ stato del mondo/stato di natura
  - una volta che l'esperimento è terminato, uno e uno solo $\omega^* \in \Omega$ sarà verificato

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) $\mathscr{F}$ = insieme di eventi di interesse per l'esperimento
  - evento: sottoinsieme di Ω, se $A \in \mathscr{F}$ allora $A \subset \Omega$
  - evento: ente logico che può essere vero (V) o falso (F)
  - se ω^* si verifica, allora A è V o F se $\omega^* \in A$ o $\omega^* \notin A$

Spazi di Probabilità

- 2) $\mathscr{F}$ = insieme di eventi di interesse per l'esperimento
  - $\mathscr{F}$ rappresenta l'informazione ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il valore logico di ogni evento in $\mathscr{F}$ verrà rivelato alla fine dell'esperimento
  - non necessariamente ogni sottoinsieme di Ω è in $\mathscr{F}$ (è un evento)
  - la scelta di $\mathscr{F}$ è guidata da natura del problema e convenienza matematica

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 3) P probabilità: per ogni evento $A \in \mathscr{F}$, un numero

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

  - $P(A)$: misura di fiducia che A sia V (prima dell'esperimento)
  - se $P(A) = 0$: è "quasi certo" che A sia F
  - se $P(A) = 1$: è "quasi certo" che A sia V
  - $P(A) > P(B)$: l'evento A è più probabile di B

Spazi di Probabilità

- Corrispondenza tra eventi e insiemi ($\rightsquigarrow$ diagrammi di Venn)
  - $\Omega =$ "universo" $=$ evento certo: sempre V
  - $\varnothing =$ insieme vuoto $=$ evento impossibile: sempre F
  - $A^c = \bar{A} =$ complementare di $A =$ "non A": V/F se e solo se A è F/V

Spazi di Probabilità

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
  - $A \cup B$ = unione di A e B = "A o B": V se A è V o B è V
  - unione non esclusiva!
  - per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

    è V se almeno uno degli A_α è V

Spazi di Probabilità

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
  - $A \cap B =$ intersezione di A e $B =$ "A e B": V se A è V o B è V
  - per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se ognuno degli A_α è V

Spazi di Probabilità

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
  - $A - B = A$ meno $B =$ "A e non B": V se A è V e B è F
  - $\bar{A} = \Omega - A$
  - $A \triangle B =$ differenza simmetrica di A e B =A o B, ma non entrambe: V se A è V e B è F, o viceversa $\rightsquigarrow$ unione esclusiva
  - inclusione tra insiemi $A \subset B$: se A è V allora B è V

Spazi di Probabilità

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
  - A e B sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$: A e B sono incompatibili $\rightsquigarrow$ non si possono verificare entrambi
  - gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono a due a due disgiunti se

    $$A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$$

    per ogni $\alpha \neq \beta$ $\rightsquigarrow$ al più uno degli eventi si può verificare
  - gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono esaustivi se

    $$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$$

    $\rightsquigarrow$ uno degli eventi si verifica certamente

Spazi di Probabilità

- Partizione di Ω: una famiglia di eventi $\mathbb{P} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ tale che
  - $A_\alpha \neq \varnothing$ per ogni $\alpha \in I$
  - a due a due disgiunti
  - esaustivi
- Una partizione permette di rappresentare l'incertezza in eventi incompatibili di cui uno sicuramente si verifica ("puzzle")
- Caso tipico: $\mathbb{P}$ discreta ($\equiv$ finita o numerabile)

Spazi di Probabilità

- Modello per esperimenti combinati/ripetuti: spazio prodotto (prodotto cartesiano)
  - spazio per l'esperimento consistente in esperimento 1 (Ω_1) seguito da ... seguito da esperimento n (Ω_n):

$$\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \ldots, n\}$$

  - spazio per l'esperimento consistente in un dato esperimento ripetuto n volte ($\Omega_i = \Omega$ per ogni i):

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega, i = 1, \ldots, n\}$$

  - i risultati di un esperimento non influenzano gli esiti di quelli successivi
  - sequenza infinita di esperimenti: e.g. $\Omega^\infty \equiv \Omega^{\mathbb{N}}$

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
  - lancio di una moneta
  - lancio di un dado
  - lancio di due/n/∞ monete
  - lancio di un dado seguito da un lancio di una moneta
  - estrazione di 5 carte da un mazzo di 52
  - partita di calcio

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
  - lancio di una moneta
  - lancio di un dado
  - lancio di due/n/∞ monete
  - lancio di un dado seguito da un lancio di una moneta
  - estrazione di 5 carte da un mazzo di 52

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
  - partita di calcio
  - prezzo di una azione/n azioni
  - numero di sinistri in un portafoglio di n contratti
  - numero di sinistri e danno totale in un portafoglio assicurativo
  - prezzo di una azione nel tempo
  - durata di vita alla nascita di un individuo/n individui
- esempi di eventi incompatibili, esaustivi, unione, intersezione, differenza, ...

Spazi di Probabilità

- Definizione formale di spazio di probabilità: una tripla

$$(\Omega, \mathscr{F}, P)$$

con

1. Ω: insieme non vuoto $\rightsquigarrow$ risultati possibili
2. $\mathscr{F}$: σ-algebra di sottoinsiemi di Ω $\rightsquigarrow$ eventi di interesse
3. P probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ $\rightsquigarrow$ misura dell'incertzza

Spazi di Probabilità

- $\mathscr{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω (gli elementi di $\mathscr{F}$ sono sottoinsiemi di Ω) tale che
  - [$\mathscr{F}$1] $\varnothing \in \mathscr{F}$, $\Omega \in \mathscr{F}$
  - [$\mathscr{F}$2, chiusura per complementazione]
    per ogni $A \in \mathscr{F}$ anche $\bar{A} \in \mathscr{F}$
  - [$\mathscr{F}$3, chiusura per unioni/intersezioni numerabili]
    per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ di eventi in $\mathscr{F}$, allora

$$\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}, \qquad \bigcap_n A_n \in \mathscr{F}$$

Spazi di Probabilità

- La coppia $(\Omega, \mathscr{F})$ è uno spazio misurabile; probabilità P su $(\Omega, \mathscr{F})$ è una applicazione

$$P : \mathscr{F} \to [0,1]$$

  tale che

  - [$P1$, misura unitaria] $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$
  - [$P2$, σ-additività] per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ di eventi a due a due incompatibili in $\mathscr{F}$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

- Se $P(A) = 1$, A è quasi certo (si scrive A q.c.)

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare come spazi di probabilità i seguenti esempi
  - lancio di una moneta
  - lancio di un dado
  - come σ-algebra, utilizzare l'insieme delle parti di Ω

$$2^{\Omega} = \mathscr{P}(\Omega) = \{A | \, A \subset \Omega\}$$

[tutti i sottoinsiemi di Ω]

σ-Algebre

- Nella definizione di σ-algebra
  - in [$\mathscr{F}$1] basta richiedere che $\emptyset \in \mathscr{F}$ oppure che $\Omega \in \mathscr{F}$ oppure che $\mathscr{F}$ sia non vuoto
  - in [$\mathscr{F}$3] basta richiedere che $\mathscr{F}$ sia chiuso rispetto a unioni numerabili oppure a intersezioni numerabili $\rightsquigarrow$ formule di de Morgan
- Ogni σ-algebra è chiusa per unioni o intersezioni finite

σ-Algebre

- Perché si richiedono $[\mathscr{F}1]$, $[\mathscr{F}2]$, $[\mathscr{F}3]$?
  - l'evento certo e quello impossibile sono sicuramente noti
  - se A è noto a esperimento terminato, tale sarà $\bar{A}$
  - se $A_1, \ldots, A_n$ sono eventi rivelati noti alla fine dell'esperimento, tali saranno
$$A_1 \cup \ldots \cup A_n, \quad A_1 \cap \ldots \cap A_n$$
    estendere questa proprietà a successioni numerabili è fatto per convenienza matematica
- Ogni operazione (finita o numerabile) su eventi di una σ-algebra dà come risultato eventi della σ-algebra

σ-Algebre

- $\mathscr{A}$ è un'algebra di sottoinsiemi di Ω se
  - [$\mathscr{A}$1] $\varnothing \in \mathscr{A}$, $\Omega \in \mathscr{A}$
  - [$\mathscr{A}$2] per ogni $A \in \mathscr{F}$ anche $\bar{A} \in \mathscr{A}$
  - [$\mathscr{A}$3] per ogni $A_1, \dots, A_n$ di elementi di $\mathscr{A}$, allora

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}, \qquad A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$$

- Ogni σ-algebra è un algebra, non viceversa (a meno che Ω o $\mathscr{A}$ siano finiti)
- Esercizio. Ω infinito, $\mathscr{F} = \{A \subset \Omega | A \text{ finito o cofinito}\}$ è un'algebra ma non una σ-algebra

σ-Algebre

- Esempi di σ-algebra
  - $\mathscr{F} = 2^{\Omega} \rightsquigarrow$ la più grande σ-algebra su Ω
  - $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\} \rightsquigarrow$ la più piccola σ-algebra su Ω, σ-algebra triviale
  - se $A \subset \Omega$, $\mathscr{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$
- Ogni σ-algebra $\mathscr{F}$ su Ω è tale che

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathscr{F} \subset 2^{\Omega}$$

σ-Algebre

- $\mathscr{F}$ rappresenta l'informazione ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il valore logico di ogni evento in $\mathscr{F}$ verrà rivelato alla fine dell'esperimento $\rightsquigarrow$ più grande è $\mathscr{F}$, maggiore l'informazione
  - σ-algebra triviale $\rightsquigarrow$ nessuna informazione
  - σ-algebra discreta $\rightsquigarrow$ massima informazione
- $\mathscr{G}, \mathscr{F}$ sono σ-algebre su Ω
  - $\mathscr{G} \subset \mathscr{F} \rightsquigarrow \mathscr{F}$ ha più informazione di $\mathscr{G}$
  - $\mathscr{G} \cap \mathscr{F}$ è una σ-algebra $\rightsquigarrow$ informazione in comune tra $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$
  - $\mathscr{G} \cup \mathscr{F}$ non è in generale una σ-algebra

σ-Algebre

- Esercizio. Partita di calcio: $\Omega = \{1, X, 2\}$, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$
  - descrivere $\mathscr{F}_1 =$ informazione di chi osserva (solo) se la squadra di casa ha vinto o meno
  - descrivere $\mathscr{F}_2 =$ informazione di chi osserva (solo) se la squadra in trasferta ha vinto o meno
  - descrivere $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$
  - verificare che $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ non è una σ-algebra

σ-Algebre

- Più in generale, se $(\mathscr{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una famiglia arbitraria di σ-algebre su Ω, tale è
$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathscr{F}_\alpha$$

- σ-algebra generata da un insieme $\mathscr{C}$ di sottoinsiemi di Ω
  - come costruire una σ-algebra che contiene gli eventi in $\mathscr{C}$ "e niente altro"?
  - costruzione "da fuori" utilizzando il risultato precedente
$$\sigma(\mathscr{C}) = \cap\{\mathscr{G} | \mathscr{G} \ \sigma\text{-algebra}, \ \mathscr{C} \subset \mathscr{G}\}$$

σ-Algebre

- La σ-algebra generata da $\mathscr{C}$ può essere caratterizzata come l'unico insieme di eventi $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ tale che
  - $\mathscr{F}$ è una σ-algebra
  - $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$
  - per ogni altra σ-algebra $\mathscr{G}$ tale che $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}$, riesce $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$

σ-Algebre

- Quindi la σ-algebra generata da $\mathscr{C}$
  - è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathscr{C}$
  - contiene tutti gli insiemi costruibili partendo da quelli di $\mathscr{C}$ (con operazioni numerabili)
- A parte alcuni casi "semplici", non è in generale possibile descrivere gli insiemi di $\sigma(\mathscr{C})$
- Come definire la condivisione (unione) delle informazioni?

σ-Algebre

- Due proprietà (ovvie) della σ-algebra generata
  - $\mathscr{F}$ è una σ-algebra $\iff \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{F})$
  - $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2 \Rightarrow \sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$
- Esercizio. Chi è $\sigma(\mathscr{C})$ quando
  - $\mathscr{C}$ è vuoto
  - $\mathscr{C} = \{\varnothing\}$
  - $\mathscr{C} = \{\Omega\}$
  - $\mathscr{C} = \{A\}$ con $\varnothing \neq A \neq \Omega$

σ-Algebre

- Caso in cui si riesce a descrivere la σ-algebra generata
  - Se $\mathbb{P} = (A_n)_{n \geq 1}$ è una partizione discreta, allora ($\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$)

$$\sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i | \, I \subset \mathbb{N}_+ \right\}$$

  - Se $\mathscr{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ insieme finito, riesce

$$\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\mathscr{C}))$$

    dove $\mathbb{P}_G(\mathscr{C}) = \{A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_n \neq \varnothing | \, A'_i = A_i \text{ o } A'_i = \bar{A}_i\}$ è la partizione generata da $\mathscr{C}$: la partizione meno fine per cui ogni insieme di $\mathscr{C}$ si piuò ottenere come unione di insiemi della partizione
  - $\mathbb{P}_1$ è più fine di $\mathbb{P}_2$ se ogni insieme di $\mathbb{P}_2$ è unione di insiemi di $\mathbb{P}_1$
- Esercizio. Descrivere $\sigma(\{A, B\})$ con A, B "generici"

σ-Algebre

- σ-Algebra di Borel in $\mathbb{R}$
  - su $\Omega = \mathbb{R}$, si considera la σ-algebra $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C})$ dove
  $$\mathscr{C} = \{\text{intervalli di } \mathbb{R}\}$$
  - $\mathscr{B}$ contiene ogni insieme ottenibile dagli intervalli tramite unioni, intersezioni (numerabili), complementazioni, ...
  - ogni insieme di interesse pratico è in $\mathscr{B}$, tuttavia $\mathscr{B} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$
  - insiemi in $\mathscr{B}$: boreliani

σ-Algebre

- Riesce $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}_i)$ $i = 1, \ldots, 5$ con
  - $\mathscr{C}_1 = \{(-\infty, a) | \, a \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathscr{C}_2 = \{(-\infty, a] | \, a \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathscr{C}_3 = \{(a, b) | \, a, \, b \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathscr{C}_4 = \{[a, b] | \, a, \, b \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathscr{C}_5 = \{\text{insiemi aperti di } \mathbb{R}\}$
- Altre scelte di insiemi generatori sono possibili

σ-Algebre

- σ-Algebra sullo spazio prodotto
  - $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$, $i = 1, \ldots, n$
  - su $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ si considera la σ-algebra prodotto

    $$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_n = \sigma(\mathscr{C})$$

    dove

    $$\mathscr{C} = \{A_1 \times \ldots \times A_n | A_i \in \mathscr{F}_i, i = 1, \ldots, n\}$$

    $A_1 \times \ldots \times A_n$: "iper-rettangoli"
  - caso particolare: $\Omega_i = \Omega$, $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}$, lo spazio è $(\Omega^n, \mathscr{F}^{\otimes n})$
  - se $\mathscr{F}_i = \sigma(\mathscr{C}_i)$ e Ω_i è unione discreta di insiemi di $\mathscr{C}_i$, per ogni i

    $$\mathscr{F} = \sigma(\{A_1 \times \ldots \times A_n | A_i \in \mathscr{C}_i, i = 1, \ldots, n\})$$

σ-Algebre

- σ-Algebra di Borel in $\mathbb{R}^n$, indicata con $\mathscr{B}^n$
  - $\mathscr{B}^n \equiv \mathscr{B}^{\otimes n} \equiv \mathscr{B} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}$ cioè

$$\mathscr{B}^n = \sigma(\{A_1 \times \ldots \times A_n | \, A_i \in \mathscr{B}\})$$

  - in base al risultato precedente, $\mathscr{B}^n$ è generato da per-rettangoli (limitati o illimitati)

$$\begin{aligned} \mathscr{B}^n &= \sigma(\{(-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_n) | \, a_i \in \mathscr{R}\}) \\ &= \sigma(\{(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] | \, a_i, b_i \in \mathscr{R}\}) \end{aligned}$$

- ogni insieme di interesse pratico è in $\mathscr{B}^n$,
- insiemi in $\mathscr{B}^n$: boreliani

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, A, $B \in \mathscr{F}$
  - $P(A \cup B)$ se A, B incompatibili
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
  - se $A \subset B$
    $$P(B - A) = P(B) - P(A)$$
    e quindi $P(A) \leq P(B)$ [monotonia]
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$
  - [finita additività] se $A_1, \ldots, A_n$ sono a due a due disgiunti

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

  - [formula di inclusione-esclusione]

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots \\ & \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

  - [finita subadditvità]

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, successione (A_n) di eventi con $A_n \in \mathscr{F}$ per ogni n
  - (A_n) è monotona non decrescente se $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n, e si pone $\lim_n A_n = \cup_n A_n$ e si scrive $A_n \uparrow A$
  - (A_n) è monotona non crescente se $A_n \supset A_{n+1}$ per ogni n, e si pone $\lim_n A_n = \cap_n A_n$ e si scrive $A_n \downarrow A$
  - [monotonia/continuità dal basso/alto] se (A_n) è è monotona

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$$

  - [subadditività]

$$P\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \sum_n P(A_n)$$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio misurabile, $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ tale che
  - $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$
  - [finita additività] $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A, $B \in \mathscr{F}$ sono incompatibili

  allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. P è σ-additiva (P è una probabilità)
2. P è continua dal basso
3. P è continua dall'alto

Proprietà della Probabilità

- Spazio di probabilità discreto:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (finito o numerabile)
  - $\mathscr{F} = 2^\Omega$
  - ogni P su questo spazio può essere assegnata tramite $p_1, p_2, \dots$ con

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ per ogni } i \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

  e ponendo, per $A \in \mathscr{F}$,

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

- Esempio. Su $\Omega = \mathbb{N}$, $p_i = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ con $\lambda > 0$; su $\Omega = \mathbb{N}_+$, $p_i = \frac{1}{2^i}$

Proprietà della Probabilità

- Equiprobabilità su uno spazio finito:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$
  - $\mathscr{F} = 2^\Omega$
  - $p_i = \frac{1}{n}$ per ogni i, cosi riesce per $A \in \mathscr{F}$

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{n} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

dove $\#A =$ numerosità di A

- Schema tipico di giochi in condizioni di simmetria: lancio di dadi, monete, estrazioni di carte, roulette, estrazioni da urne, ...

Proprietà della Probabilità

- Esercizio. Lancio di due dadi
  - descrivere lo spazio di probabilità
  - calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ dove $A =$"la somma dei dadi è 7", $B =$"il massimo dei dadi è 5"
- Esercizio. Lancio di n monete
  - descrivere lo spazio di probabilità
  - calcolare le probabilità di $E_i =$"esce testa al lancio i", $A_i =$"esce testa per la prima volta al lancio i", B="escono teste e croci in ugual numero", C_i="escono esattamente i teste"