Probabilità Condizionata e Indipendenza

Probabilità Condizionata

- Idea: come aggiornare la valutazione in base all'arrivo di nuove informazioni?
  - se si sà che l'evento B è V, come cambia la probabilità dell'evento A?
  - $P(A|B)$ probabilità di A condizionata a B (A dato B / condizionata al verificarsi di B / ...)
- Il condizionamento può riflettere
  - una ipotesi di lavoro
  - un effettivo aumento di informazione
- Interessa in particolare se $P(A|B) > P(A)$ (o $<$, o $=$)

Probabilità Condizionata

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $A, B \in \mathscr{F}$, $P(B) > 0$; la probabilità di A condizionata a B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Intuizione:
  - se B si è verificato, il nuovo spazio degli stati è $B \subset \Omega$
  - A si verifica solo se si verifica $A \cap B$, con probabilità $P(A \cap B)$
  - per ottenere una probabilità, si deve "normalizzare" dividendo per $P(B)$

- Esercizio. Lancio di due dadi, $A =$"la somma dei dadi è 7", $B =$"il massimo dei dadi è 5", $P(A|B) > ($ o $<$ o $=) P(B)$?

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - [Teorema delle probabilità composte] $A, B \in \mathscr{F}$, $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

  - [Valutazione "sequenziale"] $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, $P(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = & P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \\ & \ldots \\ & \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \\ & \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - [Disintegrabilità] $(B_i)_i \subset \mathscr{F}$ partizione discreta di Ω con $P(B_i) > 0$ per ogni i, $A \in \mathscr{F}$

    $$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A|B_i)$$

    idea: ricostruire la prob. di A come media ponderata delle prob. condizionata ad alternative esaustive
    inoltre,

    $$\min_i P(A|B_i) \leq P(A) \leq \max_i P(A|B_i)$$

  - $A, B \in \mathscr{F}$, $0 < P(B) < 1$

    $$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità

    - [Teorema di Bayes (I)] $A, B \in \mathscr{F}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

    - [Teorema di Bayes (II)] $(B_i)_i \subset \mathscr{F}$ partizione discreta di Ω con $P(B_i) > 0$ per ogni i, $A \in \mathscr{F}$, $P(A) > 0$,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}$$

Probabilità Condizionata

- Teorema di Bayes; interpretazione
  - "ribaltare" la valutazione: $P(B|A)$ in termini di $P(A|B)$
  - B_i "ipotesi" (non si sa quale evento della partizione è V); A "osservazione, dati"
  - $P(B_i)$ valutazione iniziale (a priori) sull'ipotesi; $P(B_i|A)$ valutazione finale (a posteriori) data l'osservazione
- Statistica Bayesiana: $(P(B_i))_i$ distribuzione iniziale sul parametro della distribuzione di una variabile, A osservazione della variabile, $(P(B_i|A))_i$ distribuzione finale

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - $B \in \mathscr{F}$, $P(B) > 0$; la funzione $P_B : \mathscr{F} \to [0,1]$
    $$P_B(A) = (A|B), \qquad A \in \mathscr{F}$$
    è una probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$
    $\rightsquigarrow$ la probabilità condizionata ha le stesse proprietà di quella non condizionata
  - inoltre, se $C \in \mathscr{F}$ con $P(B \cap C) > 0$
    $$(P_B)_C = P_{B \cap C}$$
    $\rightsquigarrow$ condizionare in successione a B e C $\equiv$ condizionare a $B \cap C$

Probabilità Condizionata

- Esercizio. Una portafoglio di rischi è classificato in *b*uoni (20%), *n*ormali (45%), *m*ediocri (35%); la prob. di sinistro è rispettivamente 0.02, 0.05, 0.15

  - per un rischio estratto casualmente dal portafoglio, qual è la probabilità di sinistro?

  - se un rischio produce un sinistro, con quale probabilità il rischio è buono, normale, mediocre?

Probabilità Condizionata

- Esercizio. 5 monete: 2 con due facce uguali (T), 1 con due facce uguali (C), 2 “regolari” (T e C); si sceglie a caso una moneta e si lancia due volte; calcolare la prob. che
  - esca testa al primo lancio
  - che la moneta sia regolare se è uscita testa al primo lancio
  - che, al primo lancio, la faccia inferiore sia testa se esce testa
  - che, al secondo lancio, la faccia inferiore sia testa se esce testa al primo lancio

Probabilità Condizionata

- Esercizio. In matematica attuariale vita, per un individuo neonato, si considera, per $x \geq 0$,

$$E_x = \text{“l'individuo sopravvive all'età } x\text{”}$$

  - che relazione c'è tra gli eventi E_x?
  - esprimere i simboli attuariali

$$_tp_y\,,\ _tq_y\,,\ _{t|h}q_y$$

    tramite gli eventi E_x
  - dimostrare la relazione

$$_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}$$

Correlazione tra Eventi

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - $A, B \in \mathscr{F}$, $P(B) > 0$; A è correlato positivamente / correlato negativamente / non correlato con B se

    $$P(A|B) > P(A), \qquad P(A|B) < P(A), \qquad P(A|B) = P(A)$$

    sapere che B si verifica fa incrementare la prob. di A
  - se anche $P(A) > 0$, le relazioni sono simmetriche
  - A correlato positivamente / negativamente / non correlato con B
    $\Rightarrow \bar{A}$ è correlato negativamente / positivamente / non correlato con B

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità; due eventi A, $B \in \mathscr{F}$ sono indipendenti se
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
  - proprietà di fattorizzazione
  - segue che A' e B' sono indipendenti, per ogni scelta di $A' = A$ o $A' = \bar{A}$ e di $B' = B$ o $B' = \bar{B}$
  - se A ha probabilità estrema, $P(A) \in \{0, 1\} \Rightarrow A$ è indipendente con ogni altro B
  - se $P(B) > 0$, allora A, B sono indipendenti $\Longleftrightarrow$ A non correlato con B

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathscr{F}$ famiglia di eventi qualunque sono indipendenti se per ogni $n \geq 1$, per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ (distinti),

$$P(A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}) = P(A_{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{\alpha_n})$$

    $\rightsquigarrow$ fattorizzazione su ogni sotto-famiglia finita
  - conoscere il valore di alcuni degli eventi non modifica la valutazione sugli altri eventi
  - per un famiglia finita $A_1, \dots, A_n \rightsquigarrow 2^n - n - 1$ condizioni tutte necessarie
- Esercizio. Scrivere tutte le condizioni di fattorizzazione per $n = 2, 3, 4$ eventi

Eventi Indipendenti

- Esercizio. 3 eventi non indipendenti ma indipendenti a coppie
  - $\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$, $P(\omega) = 1/9$ per ogni $\omega \in \Omega$
  - $A_k =$"la k-esima lettera è a", $k = 1, 2, 3$
- Esercizio. Si estrae una carta da un mazzo di 52; il rango è indipendente dal seme
- Esercizio. Lancio di due dadi, $A =$"la somma dei dadi è 7" è indipendente dal risultato del primo (o del secondo dado)

Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - gli insiemi di eventi $(\mathscr{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$, con $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{F}$ per ogni $\alpha \in I$, sono indipendenti se per ogni $n \geq 1$, per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ (distinti), per ogni $A_1 \in \mathscr{A}_{\alpha_1}, \ldots, A_n \in \mathscr{A}_{\alpha_n}$
  - conoscere il valore degli eventi di alcuni dei sottoinsiemi non modifica la valutazione sugli eventi degli altri sottoinsiemi
  - gli eventi all'interno di ogni insieme $\mathscr{A}_\alpha$ potrebbero non essere indipendenti
  - $\mathscr{A}_\alpha = \{A_\alpha\}$ per ogni $\alpha \rightsquigarrow$ si torna alla definizione precedente

Eventi Indipendenti

- Esempio. Lancio di n dadi, $D_{i,j} =$"il risultato del j-esimo dado è i", $i = 1, \ldots, 6$, $j = 1, \ldots, n$; le partizioni

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$$

con $\mathbb{P}_j = \{D_{1,j}, \ldots, D_{6,j}\}$, sono indipendenti

- Esempio. Ripetuti lanci di due dadi; al lancio n-esimo, $A_n =$"la somma dei dadi è 7", $B_n =$"il massimo dei dadi è 5"

$$\mathscr{A}_n = \{A_n, B_n\},\ n \geq 1$$

sono indipendenti

- Esempio. n azioni, $R_{t,i} =$"il rendimento in $(t-1, t)$ dell'i-esima azione è positivo", $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, 2, \ldots$; gli insiemi di eventi

$$\mathscr{A}_t = \{R_{t,1}, \ldots, R_{t,n}\},\ t = 1, 2, \ldots$$

sono indipendenti

Eventi Indipendenti

- $(\mathscr{A}_\alpha)_{\alpha\in I}$, con $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{F}$ per ogni $\alpha \in I$ indipendenti; due proprietà
  - ["estensione"] se ogni $\mathscr{A}_\alpha$ è chiuso rispetto a intersezioni, allora anche $(\sigma(\mathscr{A}_\alpha))_{\alpha\in I}$ sono indipendenti
  - ["impacchettamento"] se $(I_\beta)_{\beta\in J}$ è una partizione di I, allora le σ-algebre
  $$\mathscr{F}_\beta = \sigma\Big(\bigcup_{\alpha\in I_\beta} \mathscr{A}_\alpha\Big), \beta \in J$$
  sono indipendenti
  - si può estendere l'indipendenza agli eventi in σ-algebre generate e impacchettare insiemi indipendenti per ottenere nuovi insiemi indipendenti

Eventi Indipendenti

- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta:

$$\Omega = \{(L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots) | \, L_i = T \text{ o } L_i = C\}$$

$E_n =$"esce T al lancio n", $\mathscr{F} = \sigma(\{E_1, \ldots, E_n, \ldots\})$, $(E_n)_n$ indipendenti, $P(E_n) = 1/2$ per ogni n (moneta equa) calcolare

  - $P(E'_1 \cap \ldots \cap E'_n)$ per ogni scelta di $E'_i = E_i$ o $E'_i = \bar{E}_i$
  - $P(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$
  - $P($"T appare prima o poi"$)$
  - $P($"una data sequenza di T e C di fissata lunghezza k appare prima o poi"$)$