Speranza Matematica

Speranza Matematica

- X va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$; vogliamo definire

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}P(\omega)$$

  - valor medio/atteso di X
  - speranza matematica di X
  - baricentro di X
  - integrale astratto di X rispetto a P su Ω

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va semplice,

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, m$; si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{m} c_i P(A_i) \in \mathbb{R}$$

  - non dipende dalla rappresentazione di X

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va semplice,
- Esempio.
  - $X = c$ q.c (degenere), $E[X] = c$
  - $X \sim$ Bernoulli(p),
$$E[X] = p = P(A)$$
  - X con valori $x_1, \ldots, x_n$ e masse $p_1, \ldots, p_n$
$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$
  - $X \sim$ Binomiale(n, p)
$$X = 1_{E_1} + \ldots + 1_{E_n}$$
con (E_i) indipendenti e $P(E_i) = p$
$$E[X] = np$$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va nonnegativa, $X \geq 0$; si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P$$
$$= \sup\left\{ E[Y] \mid Y \text{ va semplice, } 0 \leq Y \leq X \right\} \in [0, +\infty]$$

$E[X] = +\infty$ è possibile!

- $X_1, X_2 \geq 0$ va; si può provare che
  - se $X_1 \leq X_2$ allora $0 \leq E[X_1] \leq E[X_2]$
  - $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$
  - se $X_1 \leq K$ con $K > 0$, allora $E[X] < +\infty$

Speranza Matematica

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si pone

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \qquad \text{parte positiva di } x$$
$$x^- = \max\{-x, 0\}, \qquad \text{parte negativa di } x$$

e riesce

- $x^+, x^- \geq 0$
- $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$
- $x^+ \leq |x|$, $x^- \leq |x|$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va (qualunque); X è integrabile se

$$E[|X|] < +\infty \Leftrightarrow E[X^+] < +\infty, \, E[X^-] < +\infty$$

in questo caso si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = E[X^+] - E[X^-] \in \mathbb{R}$$

- Per ogni $p \geq 1$

$$L^p = L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) = \{X \text{ va su } (\Omega, \mathscr{F}, P) \text{ con } E[|X|^p] < +\infty\}$$

L^p: va p-integrabili

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Linearità]: L^p è uno spazio vettoriale;
    per ogni $X, Y \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$
    $$E[X+Y] = E[X] + E[Y], \qquad E[\alpha X] = \alpha E[X]$$
  - [Monotonia], $X, Y \in L^1$, $X \leq Y$ q.c.,
    $$E[X] \leq E[Y]$$
  - se X è limitata, $|X| \leq K$ q.c. con $K > 0$ allora $X \in L^1$
  - se $1 \leq p < q$ allora $L^p \subset L^q$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - se $X \geq 0$ q.c. allora $E[X] \geq 0$
    inoltre,
    $$E[X] = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ q.c.}$$
    oppure
    $$P(X > 0) > 0 \Leftrightarrow E[X] > 0$$
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine (I)]:
    $$X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P) \Leftrightarrow f(x) = x \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, P_X)$$
    e in questo caso
    $$E[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega) = \int_\mathbb{R} x\mathrm{d}P_X(x)$$
    notazione alternativa:
    $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F_X(x)$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine (II)]: X va, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}/\mathscr{B}$ misurabile

    $$g(X) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P) \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, P_X)$$

    e in questo caso

    $$E[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\mathrm{d}P(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)\mathrm{d}P_X(x)$$

    notazione alternativa:

    $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F_X(x)$$

- Basta usare la legge di X, non serve quella di $g(X)$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso discreto] X va discreta con valori $x_1, \dots, x_n, \dots$ e masse $p_1, \dots, p_n, \dots$

$$X \in L^1 \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} |x_i| p_i < +\infty$$

e in questo caso

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}/\mathscr{B}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

$$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso continuo] X va continua con fdp f_X
    $$X \in L^1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) \mathrm{d}x < +\infty$$
    e in questo caso
    $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$$
    se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}/\mathscr{B}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,
    $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso misto (I)] Se Y è mistura di $X_1, X_2 \in L^1$,

    $$F_Y = \lambda F_{X_1} = (1-\lambda)F_{X_2}$$

    allora $Y \in L^1$ e

    $$E[Y] = \lambda E[X_1] + (1-\lambda)E[X_2]$$

  - [Caso misto (II)] se X ha parte discreta con valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e masse $p_1, \ldots, p_n \ldots$ e parte continua con "densità" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora

    $$E[Y] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Speranza Matematica

- Possibili estensioni
  - tutte le proprietà viste continuano a valere per va nonnegative (anche se non integrabili), con ovvi aggiustamenti
  - si puó definire la speranza matematica di X in generale anche se non integrabile, se una delle due speranza

$$E[X^+], \qquad E[X^-]$$

    è finita; le proprietà viste continuano a valere, con ovvi aggiustamenti
  - anche se $X \in \overline{\mathbb{R}}$ ha senso definire $E[X] \in \overline{\mathbb{R}}$, a meno che non sia $P(X = +\infty) > 0$, $P(X = -\infty) > 0$; se $E[|X|] < +\infty$ allora X è finita q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.
  - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  $$E[X] = \lambda$$
  - $X \sim U(a, b)$
  $$E[X] = \frac{a+b}{2}$$
  - $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$
  $$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  $$E[X] = \mu$$
  - X ha distribuzione di Cauchy se la fdp è
  $$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

  speranza matematica non definita

Speranza Matematica

- Alcune trasformate di una va X
  - $E[X^p]$, $E[|X|^p]$ momenti e momenti assoluti di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
  - $E[(X - E[X])^p]$ momenti centrali di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
  - $M_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}]$ funzione generatrice dei momenti, $M_X : I \to \mathbb{R}$, I intervallo contenente 0;
    se $M_X(t) = M_Y(t)$ per ogni t in un intorno di 0, $X \sim Y$;
    $M_x^{(n)}(0) = E[X^n]$ ($X \in L^n$)
  - $\varphi_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]$ funzione caratteristica, $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
    se $\varphi_X = \varphi_Y$ allora $X \sim Y$;
    $\varphi_X^{(n)}(0) = \mathrm{i}^n E[X^n]$ ($X \in L^n$)

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze
  - [Disuguaglianza di Jensen]
    I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ convessa, $\mathscr{B}_I/\mathscr{B}$ misurabile
    X va, $X \in I$ q.c. con $f(X) \in L^1$
    allora $X \in L^1$
    $$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$
- Esempio.
  - $E[|X|] \leq |E[X]|$ se $X \in L^1$
  - $E[X]^2 \leq E[X^2]$ se $X \in L^2$

Speranza Matematica

- Varianza: se $X \in L^2$ si definisce

$$\sigma_X^2 = \mathrm{VAR}[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{VAR}[X]} =$ deviazione standard di X

- Proprietà: se $X \in L^2$
  - $\mathrm{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2$
  - $\mathrm{VAR}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathrm{VAR}[X]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - $\mathrm{VAR}[X] = 0$ se e solo se $X = 0$ q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.
  - se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, calcolare
  $$E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$$
  e ricavare VAR$[X]$
  - $X \sim U(a,b)$
  $$\text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$
  - $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\lambda)$
  $$\text{VAR}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$
  - $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
  $$\text{VAR}[X] = \sigma^2$$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze
  - [Disuguaglianza di Markov] $X \geq 0$ q.c., per ogni $\alpha > 0$
    $$P(X > \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$
  - [Disuguaglianza di Bienaymé-Chebyshev] $X \in L^2$, per ogni $\varepsilon > 0$
    $$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$
    quindi per ogni $k \geq 1$
    $$P(|X - E[X]| > k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica
  - se $X_n \to X$ q.c. (convergenza quasi certa), cioè per ogni $\omega \in A$ con $P(A) = 1$,
  $$\lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) \to X(\omega),$$
  quando succede che
  $$\lim_{n \to +\infty} E[X_n] = E[X] \qquad ?$$
  - [Teorema di convergenza monotona]
  $(X_n)_{n \geq 1}$ va con $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, q.c.
  allora posto
  $$X = \lim_{n \to +\infty} X_n \equiv \sup_n X_n \text{ q.c.}$$
  riesce
  $$\lim_{n \to +\infty} E[X_n] = E[X] \in [0 + \infty]$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica
  - [Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)]
    $(X_n)_{n\geq 1}$ e X va tali che
    $$\lim_{n\to+\infty} X_n = X \text{ q.c.}$$
    ed esiste $Y \in L^1$ tale che
    $$|X_n| \leq Y \text{ per ogni } n \geq 1, \text{ q.c.}$$
    allora $X_n, X \in L^1$ per ogni $n \geq 1$ e
    $$\lim_{n\to+\infty} E[X_n] = E[X]$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche
  - [Serie a termini positivi]
    $(X_n)_{n\geq 1}$ va con $X_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ q.c., allora
    $$E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$
  - [Serie convergente assolutamente] $(X_n)_{n\geq 1}$ va con
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$$
    allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n| \in L^1$ e
    $$E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

Speranza Matematica

- Esercizio. Nei seguenti due casi dire se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$$

converge q.c. e calcolare il suo valore atteso

  - $X_n \sim \text{Gamma}(1, 2^{n-1})$, $n \geq 1$
  - per $n \geq 1$

$$X_n \sim \begin{cases} -\frac{1}{n!} & \text{con prob. } 1-p \\ +\frac{1}{n!} & \text{con prob. } p \end{cases}$$