Equazioni di Maxwell

Legge di Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ in forma integrale: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r})\,dV$

ovvero: L'integrale della densità di carica $\rho(\vec{r})$ fatto su un volume chiuso V è pari al flusso del campo $\vec{E}$ attraverso la superficie S che racchiude il volume V.

Applicazione semplice: campo $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme q:

Per simmetria, $\vec{E}(\vec{r})$ è radiale e costante in modulo sulla superficie sferica.

Il flusso di E sulla sfera sarà: $4\pi r^2\cdot E(r)$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Legge di Gauss per il magnetismo $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ in forma integrale: $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

La conseguenza è che non esistono "cariche" magnetiche. I campi $\vec{B}$ sono generati da dipoli magnetici.

Legge dell'induzione di Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \implies \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Una variazione di flusso di $\vec{B}$ su una certa superficie S, genera un campo $\vec{E}$. Se calcolo l'integrale di linea di $\vec{E}$ su un percorso chiuso che delimita S, il valore che ottengo è pari alla variazione di flusso di $\vec{B}$ su S.

Legge di Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{B}$ può essere generato da una corrente $\left(\int \vec{J} \cdot d\vec{S}\right)$ o dalla variazione di flusso del campo elettrico.

Combinando tra loro le equazioni di Maxwell si trova che $\vec{E}(t)$ e $\vec{B}(t)$ obbediscono alle seguenti equazioni:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{E}(t) = c^2 \frac{d^2}{dx^2}\vec{E}(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} B(t) = c^2 \frac{d^2}{dt^2} B(t)$$

Sono le equazioni d'onda che, estese al caso generale 3D $(x \to \vec{r})$ hanno soluzioni:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad \lambda$ lunghezza d'onda

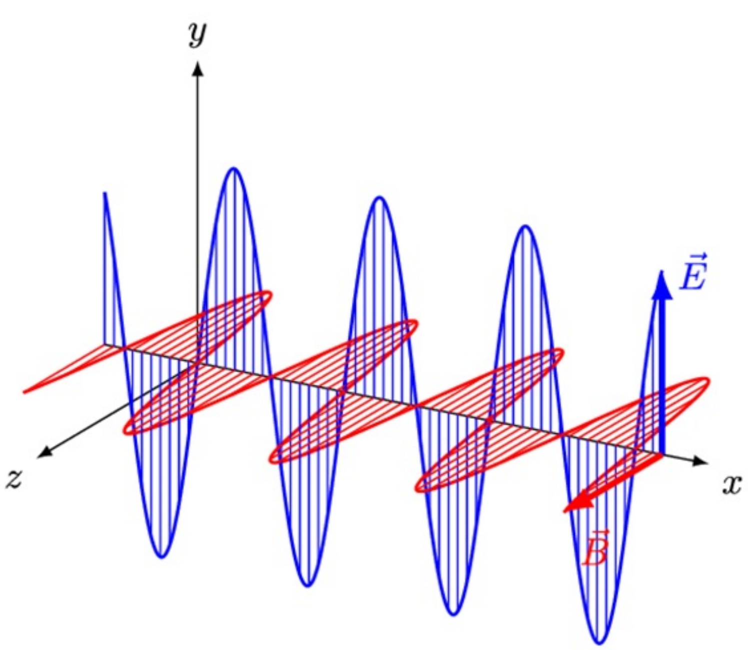
$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Un'onda elettromagnetica può sempre essere descritta con una combinazione lineare di onde piane

Onde elettromagnetiche

Un'onda elettromagnetica posso rappresentarla come sovrapposizione di onde piane, ognuna delle quali costituite da un campo elettrico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{B}$ di forma sinusoidale.
Esprimendo i campi in forma complessa, sarà:

$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\vec{B} = \overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ con $\vec{k}$ vettore d'onda e ω velocità angolare.



$\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ formano una terna di vettori ortogonali, l'onda si propaga in direzione $\hat{k}$

Si ha inoltre che $B_0 = \frac{E_0}{c}$.
Affrontando il problema dell'interazione tra un campo e.m. e particelle cariche,
il campo magnetico è trascurabile a meno che non trattiamo casi relativistici.
(la forza di Lorentz vale: $\vec{F} = q(\vec{F} + \vec{v} \times \vec{B})$)

Una regione di spazio dove ci sono campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ contengono energia.

La densità di energia vale, rispettivamente, $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ e $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Nel caso di onda piana, i campi si propagano, nel vuoto, con velocità c

Così avviene per l'energia che trasportano.

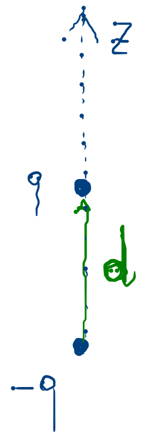
Se pensiamo alle onde come a dei fotoni, immaginare che dell'energia venga trasportata è immediato.

Rimanendo però in notazione $\vec{E}$ e $\vec{B}$, conviene introdurre il vettore di Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$\vec{S}$ ha la stessa direzione di $\vec{K}$, ovvero la direzione di propagazione dell'onda e.m.

Se integro $\vec{S}$ su una superficie trovo l'energia che l'onda e.m. trasporta attraverso essa nell'unità di tempo



Supponiamo di avere due cariche $\pm q$, disposte lungo z ad una distanza d tra loro

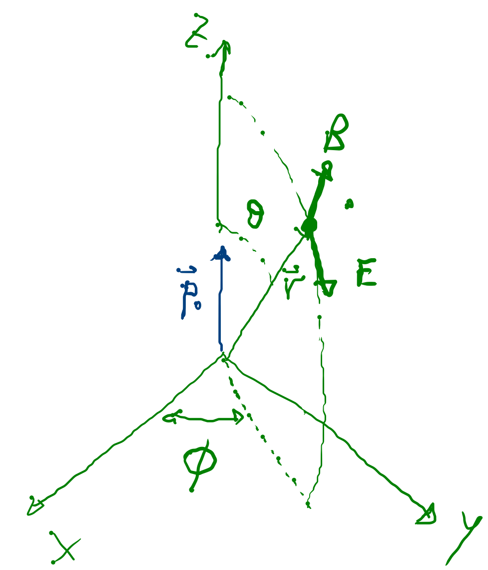
Si definisce momento di dipolo il vettore $\vec{p}_0 = d\, q\, \hat{e}_z$

Se ogni carica inizia a cambiare valore come $q \cdot \cos(\omega t)$ si parla di momento di dipolo oscillante $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$

Risolvendo le equazioni di Maxwell si trova che, a distanza $r \gg d$, il campo elettrico generato dal dipolo è:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\, \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{E}{c}\, \hat{\phi}$$

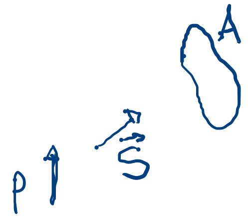


Il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ ha direzione radiale e vale:

$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \right]^2 \hat{r}$$

Il suo valore medio nel tempo: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2}\, \hat{r}$

L'integrale di $\langle \vec{S} \rangle$ su una certa area A mi dà la potenza irradiata su quella superficie:



$$\langle P \rangle_A = \int_A \langle \vec{S} \rangle \, d\vec{a}$$

La potenza totale irradiata la si può trovare integrando su una sfera di raggio r:

$$P = \int \langle S \rangle \, d\vec{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 c} \int \frac{\sin^2\theta}{r^2} \underbrace{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{da} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12 \pi c} \qquad \left(\int_0^{\pi} \sin\theta^3 \, d\theta = \frac{4}{3} \right)$$

Caso particolare: e^- libero in onda e.m. (Scattering Thomson)

Un e^- investito da un'onda piana sentirà una forza $\vec{F} = -e\vec{E}$ (trascuro $\vec{B}$):

$$m\ddot{z} = -eE$$

supponendo $\vec{E}$ diretto lungo $\vec{z}$

$$= -eE\cos\omega t$$

Questa equazione ha soluzione:

$$z(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)$$

Ma, se considero la quantità $ez(t)$, essa mi rappresenta un dipolo oscillante, ha la stessa forma:

$$p(t) = ez(t) = p_0\cos(\omega t) \quad \text{con} \quad p_0 = \frac{e^2E_0}{m\omega^2}$$

In questo caso la potenza emessa sarà:

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0}{c}\frac{1}{12\pi}\frac{e^4E_0^2}{m^2\cancel{\omega^4}}\cdot\cancel{\omega^4}$$

Scompare cioè la dipendenza da ω.

Inoltre, se definiamo: $r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} = 2.818 \; 10^{-15} \, m$ raggio classico dell'elettrone

e chiamiamo $I_0^i = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ l'intensità dell'onda incidente $\left(\langle S\rangle = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\right)$

allora la potenza diventa

$$\boxed{P = \frac{8}{3}\pi r_e^2 I_0^i = \sigma_T I_0^i}$$

Questa è la potenza irradiata da un elettrone e quindi sottratta all'onda incidente

$\sigma_T = 0.665 \cdot 10^{-28} \, m^2$ sezione d'urto Thomson

CONSIDERAZIONI :

1. Lo scattering Thomson descrive bene :

- interazione radiazione - plasma
- interazione raggi X - materia

a energie di fotone ~ 4000 - 20000 eV , se non ci sono soglie di assorbimento, gli e^- degli atomi rispondono a come e^- liberi

2. Se ω dell'onda e.m. è vicina ad una frequenza di assorbimento dell'atomo/molecola in cui si trova l'elettrone, la sua descrizione come e^- libero non è più valida. Deve essere descritto invece come un oscillatore armonico smorzato :

$$m\ddot{z} = \underbrace{-\gamma m \dot{z}}_{\text{smorzamento}} \underbrace{- m\omega_0^2 z}_{\text{richiamo elastico } (\sim F = -Kx)} - eE$$

In questo caso si trova una sezione d'urto

$$\sigma_R = \sigma_T \left(\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)$$

$$\sigma_R = \sigma_T \left(\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)$$ è nota come sezione d'urto di Rayleigh

<u>NOTA</u> Se si trascura lo smorzamento $(\gamma = 0)$ e si considera $\omega \gg \omega_0$

$\sigma_R \approx \sigma_T$, ritroviamo Thomson

<u>NOTA</u> σ_R ci dice perché il cielo è azzurro e il tramonto è rosso....

Esempio

Ho un fascio di luminosità di $10^{15}\ ph/_{s \cdot cm^2}$

Quanti fotoni vengono interattati da $1\ e^-$ in un'ora?

In un'ora ho il flusso di $N = 10^{15} \cdot 3600 = 3.6 \cdot 10^{18}\ ph/_{cm^2}$

La probabilità e quindi i fotoni interattati saranno: $N \cdot \sigma_T = 3.6\, 10^{18} \cdot 0.665 \cdot 10^{-24}$

$\approx 2 \cdot 10^{-6}$

$\boxed{!\ \text{si definisce}\quad 1\ \text{barn} = 10^{-24}\ cm^2}$

Esempio

Ho un fascio di luminosità di $10^{15}\ ph/_{s \cdot cm^2}$

Quanti fotoni vengono interattati da 1 e^- in un'ora?

In un'ora ho il flusso di $N = 10^{15} \cdot 3600 = 3.6 \cdot 10^{18}\ ph/_{cm^2}$

La probabilità e quindi i fotoni interattati saranno: $N \cdot \sigma_T = 3.6\,10^{18} \cdot 0.665 \cdot 10^{-24}$

$\approx 2 \cdot 10^{-6}$

$\boxed{\text{! si definisce } 1 \text{ barn} = 10^{-24}\ cm^2}$

Esempio 2

Un puntatore laser ha in genere potenza $\sim 1\,mW$

Quanti fotoni al secondo genera un puntatore da $1\,mW$ a luce da $635\,nm$?

$$1\,mW = 1 \cdot 10^{-3}\,J/s$$

Un fotone da $635\,nm$ ha energia: $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34})\,J \cdot s \cdot (3 \times 10^{8})\,m/s}{635 \cdot 10^{-9}\,m} = 3.1 \cdot 10^{-19}\,J$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1\,mW}{h\nu} \approx 3 \cdot 10^{15}\,ph/s}$$