Geometria 1

VI appello d'esame

Anno accademico 2021-2022

20/9/2022

1) Calcolare il determinante e il rango della matrice reale
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$f(x, y, z) = (x + 2y + z,\ x - y - z).$$
   (a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
   (b) Determinare dimensione e base per nucleo e immagine di f.
   (c) Dire se f è iniettiva o suriettiva.
   (d) Determinare basi rispetto alle quali la matrice di f è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Dire per quali valori del parametro reale α il seguente sistema è compatibile, e risolverlo per $\alpha = 1$, descrivendone lo spazio delle soluzioni:
$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_3 - 2x_4 = \alpha \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ \alpha x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4) Si consideri la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Verificare che l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è autoaggiunto, dove $\mathbb{R}^3$ è munito del prodotto scalare canonico.
   (b) Determinare una base ortonormale diagonalizzante per L_A e la matrice D di L_A rispetto a tale base.
   (c) Determinare una matrice ortogonale S, e la sua inversa, tale che $S^{-1}AS = D$.