APPENDICE A

CALCOLO DI VERITA' E ALGEBRA BOOLEANA

a.1) Introduzione.

Si e' gia' visto al capitolo II cosa si intenda per algebra booleana e come essa possa essere adattata allo studio dei circuiti di commutazione. In tale sede tuttavia, piu' che introdurre l'algebra booleana, ne sono stati presi in esame quei risultati che tornano utili nell'analisi e nella sintesi di circuiti digitali, senza alcuna pretesa di rigore formale. Nella presente appendice pertanto verra' ripreso l'argomento con una maggior attenzione per quanto riguarda un suo inquadramento sistematico.

Prima di procedere tuttavia ad una definizione formale dell'algebra e' opportuno prendere in considerazione il seguente semplice esempio.

Si voglia realizzare un sistema di allarme per le cinture di sicurezza degli autoveicoli. Vi sia una serie di sensori atti a misurare le condizioni del sistema; un primo sensore sia piazzato sul cambio per accorgersi se esso sia in folle o meno; un interruttore sia posto sotto ciascun sedile anteriore ed infine ciascuna cintura sia dotata di un interruttore che da' l'informazione se essa e' allacciata o meno. Le specifiche di progetto siano:

" Un cicalino deve suonare quando l'accensione e' attivata, il cambio e' innestato e almeno uno dei due sedili anteriori e' occupato senza che la relativa cintura sia allacciata.

Il problema e' sufficientemente semplice per poter essere risolto con metodi di progetto semiempirici. E' tuttavia opportuno procedere attraverso un'analisi formale delle specifiche assegnate, metodo che d'altra parte e' l'unico praticabile quando si ha a che fare con sistemi piu' complessi.

Le grandezze delle specifiche di progetto possono essere listate come segue:

Suono del cicalino	A
Accensione attivata	I
Cambio innestato	G
Sedile anteriore sinistro occupato	L
Sedile anteriore destro occupato	R
Cintura sinistra allacciata	B_l
Cintura destra allacciata	B_r

A ciascuna grandezza viene cioe' associata una variabile, rappresentativa della grandezza stessa, che puo' assumere un valore di verita' **T** o **F** a seconda che la condizione espressa sia vera o falsa.

In generale si definira' con una variabile qualsiasi dichiarazione che possa essere classificata come vera o falsa.

Il metodo che permette di manipolare queste variabili e di assegnare ad esse un **valore di verita'** e' conosciuto come **calcolo funzionale di verita'** e non si limita alla manipolazione di grandezze semplici come quelle appena introdotte.

Si puo' osservare come prima cosa che per ogni affermazione positiva esiste una corrispondente formulazione negativa. Ad esempio:

La cintura sinistra non e' allacciata $\overline{B_l}$

Poiche' $\overline{B_l}$ e' vera quando B_l e' falsa e viceversa, essa viene chiamata la **negazione** di B_l (spesso la negazione di A viene indicata simbolicamente con ~ A o con A').

Si consideri ora la proposizione:

"La cintura di sinistra non e' allacciata e il sedile anteriore sinistro e' occupato"

$$\overline{B_l} \cap L$$

E' questa una **funzione composta di verita'** o affermazione composta, il cui valore di verita' puo' essere determinato a partire dalle proposizioni componenti. Le esatte relazioni tra i valori di verita' delle affermazioni componenti e il valore di verita' dell'affermazione composta dipende dalla connessione (**o connettivo**) esistente tra le parti componenti. Nel caso in esame il connettivo e l'AND e indica che la proposizione $\overline{B_l} \cap L$ e' vera se e solamente se le proposizioni elementari B_l e L sono ambedue vere. L'AND e' una relazione molto comune tra le proposizioni e viene rappresentata con il simbolo $\cap$ (che d'altra parte e' gia' stato adoperato).

Vi sono evidentemente solo quattro possibili combinazioni di valori di verita' di due proposizioni A e B. Si puo' pertanto definire completamente la proposizione composta $A \cap B$ riportando i suoi valori di verita' in una tabella di quattro righe, come illustrato in fig. A.1.1; tale tabella prende il nome, evidente in se stesso, di tavola di verita'.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \oplus B$
F	F	F	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	F

figura A.1.1

La tabella definisce anche il connettivo $A \cup B$ che simbolizza una proposizione che e' vera quando l'una o l'altra o ambedue le proposizioni elementari sono vere.

Il relativo connettivo potrebbe essere chiamato **OR**, ma l'uso comune della parola "o" non e' sempre in accordo con la proposizione $A \cup B$. Si consideri infatti l'affermazione:

"Giorgio usa vestiti grigi o azzurri"

E' evidente che tale affermazione non significa che Giorgio usi **contemporaneamente** vestiti grigi e azzurri. Nel caso che si sta esaminando pertanto il connettivo prende il nome di **OR ESCLUSIVO** e viene rappresentato con $A \oplus B$. La relativa tavola di verita' e' riportata nell'ultima colonna di fig. A.1.1.

Il connettivo $\cup$ viene per contrasto chiamato **OR INCLUSIVO**, ma molto spesso, in relazione al suo frequentissimo uso, lo si chiama semplicemente **OR**.

Prima di passare al calcolo funzionale di verita' del problema che si sta esaminando, si puo' poi definire un altro connettivo, il cui simbolo e' $\equiv$. $A \equiv B$ sta a indicare che A e B **hanno sempre lo stesso valore di verita'**, cioe' A e' vero **se e solo se** B e' vero. La relativa tavola di verità e:

A	B	A ≡ B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

figura A.1.2

Si possono ora rappresentare le specifiche di progetto del sistema in esame con un'equazione funzionale di verita'. E' tuttavia opportuno rimanipolare tali specifiche in termini di proposizioni semplici:

"L'allarme suonera' (A) **se e solo se** l'accensione e' attivata (I) **e** il cambio e' innestato (G) **e** il sedile anteriore sinistro e' occupato (L) **e** la cintura sinistra non e' allacciata ($\overline{B_l}$) **oppure** il sedile anteriore destro e' occupata (R) **e** la cintura destra non e' allacciata ($\overline{B_r}$)."

A partire da tali specifiche si puo' scrivere facilmente l'equazione funzionale di verita'. Si ottiene:

$$A \equiv I \cap \left[G \cap \left(\left(L \cap \overline{B_l}\right) \cup \left(R \cap \overline{B_r}\right)\right)\right]$$

Il progetto a questo punto non e' certamente terminato, ma e' stato possibile trasformare le specifiche in una forma compatta, non ambigua ed atta a manipolazioni matematiche.

Si noti tuttavia che il progettista deve esprimere le specifiche in forma di proposizioni messe in relazione tra di loro da connettivi ben specificati e non tutte le proposizioni dichiarative sono tali. Ad esempio:

"L'allarme e' suonato poiche' la cintura destra non era allacciata."

non e' una funzione composta di verita' poiche' il suo valore di verita' non puo' essere determinato unicamente a partire a partire dal valore di verita' delle singole proposizioni componenti. Infatti, anche se ambedue le componenti sono vere, la proposizione composta puo' non essere vera in quanto il sedile destro potrebbe non essere occupato. In tal caso la parte destra dell'affermazione composta e' vera, ma l'allarme potrebbe essere stato attivato dal conducente che non ha allacciato la cintura di sicurezza. Un'affermazione del tipo appena visto non puo' evidentemente essere manipolata tramite il calcolo funzionale di verita'.

a.2) I connettivi binari.

I connettivi definiti nelle tabelle di fig A.1.1 e A.1.2 sono chiamati **binari** in quanto si riferiscono unicamente a **due** proposizioni semplici. Ciascun connettivo binario corrisponde ad un'assegnazione (**unica**) dei valori di verita' alle quattro righe della relativa tavola di verita'. Poiche' vi sono 16 modi diversi con cui si possono assegnare i valori di verita' alle quattro righe, esisteranno 16 connettivi, che sono riportati in fig A.2.1 assieme ai loro relativi simboli.

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

figura A.2.1

Tra questi vari connettivi, particolare interesse ha quello 13

$$A \supset B$$

che corrisponde alla proposizione composta

"se A e' vero, allora B e' vero"

ed e' chiamato implicazione. Questo connettivo e' simile a quello "**se e solamente se**" introdotto al paragrafo precedente (connettivo 9), eccetto per il fatto che B non e' necessariamente falso se A e' falso.

Si consideri ad esempio la proposizione composta:

$$(2 > x > 1) \supset (x > 0) \qquad \text{(a.2.1)}$$

Se x=0.5 la proposizione x>0 e' certamente vera, mentre la proposizione 2>x>1 e' falsa. Non vi e' tuttavia contraddizione con la proposizione (a.2.1) nel suo complesso, che e' vera come e' stato definito nella tabella di fig. A.2.1. Il valore di verita' dell'implicazione (che spesso e' anche detta **if - then**) puo' a prima vista apparire non molto naturale, ma questo concetto e' necessario in molti argomenti matematici. E' tuttavia bene puntualizzare che la distinzione tra il connettivo "implicazione" e quello "se e solamente se" e' estremamente importante. E' necessario infatti che:

$$A \supset B \qquad \text{e} \qquad B \supset A \tag{a.2.2}$$

affinche' $A \equiv B$. Cioe':

$$(A \equiv B) \equiv [(A \supset B) \cap (B \supset A)] \tag{a.2.3}$$

La dimostrazione e' immediata e si puo' ottenere manipolando e confrontando le rispettive tavole di verita'.

A	B	A ⊃ B	A	B	B ⊃ A	A	B	(A ⊃ B) ∩ (B ⊃ A)	A ≡ B
F	F	T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Poiche' compito del progettista e' quello di tradurre in una forma matematica precisa specifiche espresse in linguaggio naturale , e' necessario tener presente che nell'uso normale del linguaggio l'espressione "se ..... , allora ..." viene molto spesso usata con il significato di " se e solamente se .... , allora …".

Ad esempio una proposizione espressa in modo improprio potrebbe essere:

"**Se l'interruttore e' chiuso, allora l'uscita del circuito e' di 5 volt**"

che piu' correttamente dovrebbe venir scritta:

"**L'uscita del circuito e' di 5 volt se e solamente se l'interruttore e' chiuso**"

Ancora di particolare interesse sono i connettivi 8 e 14, esprimibili come:

$$A \uparrow B = \left(\overline{A \cap B}\right) \tag{a.2.4}$$

e

$$A \downarrow B = \left(\overline{A \cup B}\right) \tag{a.2.5}$$

detti rispettivamente NAND e NOR.

a.3) Valutazione delle funzioni di verita'.

Sulla base di quanto visto ai paragrafi precedenti si possono ora prendere in considerazione proposizioni complesse realizzate con piu' di un connettivo. Si supponga, ad esempio, di voler determinare il valore di verita' della proposizione:

$$\overline{A} \cup (A \supset B) \qquad \text{(a.3.1)}$$

nel caso in cui sia A che B siano false. Rimpiazzando nella (a.3.1) i rispettivi valori si ottiene:

$$\overline{F} \cup (F \supset F) \equiv T \cup T \equiv T \qquad \text{(a.3.2)}$$

L'implicazione, definita in fig. A.2.1, e' vera quando ambedue le proposizioni elementari sono false. pertanto $F \supset F$ puo' essere sostituita dal valore T. Finalmente due proposizioni vere collegate dal connettivo OR producono ancora un valore vero (T), completando in tal modo la valutazione dell'espressione (a.3.2).

Comunque sia, i passi successivi del calcolo sono connessi da □ che sta ad indicare che il valore di verita' delle espressioni sui due lati di tale simbolo hanno lo stesso valore di verita'. Per le tre rimanenti combinazioni di valori di A e di B l'espressione (a.3.1) e' poi valutata nella tabella di fig. A.3.1.

A	**B**	$\overline{A}$	**A ⊃ B**	$\overline{A}$ **∪ (A ⊃ B)**	$\overline{A}$ **∪ B**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**

figura A.3.1

Si noti che in ciascuna riga il valore di verita' coincide con quello definito per la proposizione A⊃B. Si puo' quindi scrivere che:

$$\overline{A} \cup (A \supset B) \equiv (A \supset B) \qquad \text{(a.3.3)}$$

Si osservi inoltre l'uso delle parentesi nella (a.3.1). In loro assenza la relativa espressione potrebbe venir interpretata come:

$$(\overline{A} \cup A) \supset B \qquad \text{(a.3.4)}$$

i cui valori di verita', diversi da quelli della (a.3.1) sono riportati in fig. A.3.2.

A	**B**	$\overline{A}$	$\overline{A}$ **∪ B**	**(**$\overline{A}$ **∪ A) ⊃ B**	**B**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**

figura A.3.2

Dall'osservazione di tale tavola di verita' si puo' concludere che:

$$\left(\overline{A} \cup A\right) \supset B \equiv B$$

L'uso delle parentesi e' evidentemente essenziale per la comprensione delle espressioni.

Una qualsiasi espressione realizzata a partire da due proposizioni mediante l'uso di un qualsiasi numero di connettivi binari e di parentesi, che stabiliscono in maniera univoca l'ordine delle operazioni, puo' sempre essere ridotta ad una lista di quattro valori di verita' che corrispondono a ciascuna combinazione di valori di A e B. Poiche' in fig. A.2.1 sono riportate tutte le 16 possibili funzioni di due variabili, l'espressione originale, per quanto complessa, potra' sempre essere rimpiazzata da un'espressione in cui A e B sono legati da un singolo connettivo binario.

a.4) Proposizioni composte.

Si consideri la proposizione:

$$Z \equiv \left(H \cap \overline{R}\right) \supset D \equiv \overline{\left(H \cap \overline{R}\right)} \cup D \qquad \text{(a.4.1)}$$

L'analisi della relativa tavola di verita' si distingue da quelle condotte negli esempi del paragrafo precedente solo in quanto il numero di righe necessarie non e' quattro, ma otto. Essa, derivata dai valori di verita' dell'espressione (a.4.1), e':

H	R	D	$\overline{R}$	$H \cap \overline{R}$	$(H \cap \overline{R}) \supset D$	$\overline{H \cap \overline{R}}$	$\overline{H \cap \overline{R}} \cup D$
F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T

figura A.4.1

Con riferimento alla fig. A.2.1 si puo' immediatamente verificare che:

$$\overline{A} \supset B \equiv A \cup B$$

e quindi segue immediatamente che:

$$Z \equiv \left(H \cap \overline{R}\right) \supset D \equiv \overline{\left(H \cap \overline{R}\right)} \cup D$$

La validita' di quest'ultima espressione e' dimostrata anche in fig. A.4.1, in quanto le due tavole di verita' coincidono. Tuttavia l'ultima espressione ricavata utilizza i soli connettivi

$\cap$, $\cup$ e NOT. Si puo' dimostrare che qualsiasi proposizione composta, formata da un numero qualsiasi di proposizioni elementari, puo' essere espressa in ogni caso sulla base di questi tre soli connettivi binari.

a.5) Insiemi sufficienti di connettivi.

Nei paragrafi precedenti si e' visto che alcuni connettivi binari possono essere espressi sulla base di vari altri connettivi. Si presenta quindi spontanea la domanda di quale sia l'insieme piu' piccolo di connettivi che permette di esprimere tutte le 16 funzioni di fig. A.2.1.

Si consideri ad esempio l'insieme dei connettivi che contiene solo $\cap$ e $\cup$. I casi in cui sia A che B sono falsi e' chiaramente critico. Infatti sia $A\cap B$ che $A\cup B$ sono ambedue falsi e quindi sulla base di questi due connettivi non possono essere espressi quelli che per valori falsi di A e B assumono valore vero (la dimostrazione formale puo' essere compiuta per via induttiva).

Si supponga ora che all'insieme precedente venga aggiunto il connettivo NOT. L'intuizione che qualsiasi funzione possa ora essere espressa sulla base di questi tre soli connettivi e' corretta. E' sufficiente determinare i valori di verita' delle funzioni di fig. A.5.1 e confrontarli con quelli dei connettivi di fig. A.2.1.

$\mathbf{f_0} \equiv A\cap \overline{A}$	$\mathbf{f_8} \equiv \overline{A\cup B}$
$\mathbf{f_1} \equiv \mathbf{A\cap B}$	$\mathbf{f_9} \equiv (\overline{A}\cap \overline{B})\cup(A\cap B)$
$\mathbf{f_2} \equiv A\cap \overline{B}$	$\mathbf{f_{10}} \equiv \overline{B}$
$\mathbf{f_3} \equiv \mathbf{A}$	$\mathbf{f_{11}} \equiv A\cup \overline{B}$
$\mathbf{f_4} \equiv B\cap \overline{A}$	$\mathbf{f_{12}} \equiv \overline{A}$
$\mathbf{f_5} \equiv \mathbf{B}$	$\mathbf{f_{13}} \equiv \overline{A}\cup B$
$\mathbf{f_6} \equiv (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$	$\mathbf{f_{14}} \equiv \overline{A\cap B}$
$\mathbf{f_7} \equiv A\cup \overline{B}$	$\mathbf{f_{15}} \equiv A\cup \overline{A}$

figura A.5.1

Esistono tuttavia insiemi sufficienti di connettivi ancora piu' ridotti; sia quello AND, NOT che quello OR,NOT sono sufficienti. Infatti:

$$\overline{A\cap B} \equiv \overline{A}\cup\overline{B} \qquad\qquad \overline{A\cup B} \equiv \overline{A}\cap\overline{B}$$

Per esprimere facilmente le proposizioni complesse d'altra parte e' piu' conveniente fare riferimento all'insieme AND, OR, NOT.

a.6) L'algebra booleana.

Quando si rende necessario costruire una realizzazione fisica di una tavola di verita' e' altamente desiderabile che cio' sia fatto a costo minimo. E' possibile verificare che un determinato circuito realizza una specifica tavola di verita' esaminandone l'uscita in corrispondenza a ciascuna combinazioni di ingressi e in modo del tutto simile si puo' verificare se due funzioni sono equivalenti. Il calcolo di verita' tuttavia non fornisce una via praticabile per la ricerca della piu' conveniente realizzazione di una data funzione.

A questo scopo e' conveniente introdurre l'algebra booleana. L'insieme piu' conveniente di postulati per un'algebra booleana e' forse quello formulato da Huntington nel 1904.

Il primo postulato serve a definire il sistema sotto esame.

POSTULATO 1

Esiste un insieme di K oggetti o elementi, soggetti ad una relazione di equivalenza indicata con "=" che soddisfano il principio di sostituzione.

Una coppia ordinata di elementi (x,y) si dicono soggetti alla relazione ***R*** quando possiedono alcune proprieta' che li collegano; tale fatto viene normalmente indicato con x***R***y.

La relazione ***R*** e' definita come l'insieme di tutte le coppie ordinate che posseggono quella stessa particolare proprieta', qualunque essa sia. E' del tutto banale osservare che gli elementi x e y possono essere proposizioni logiche, numeri reali o qualsiasi altra cosa.

Per quanto segue si assumera' che ***R*** sia una relazione su un insieme di cui x e y possono rappresentare qualsiasi elemento.

Se x***R***x per qualsiasi x nell'insieme di interesse, allora la relazione viene chiamata **riflessiva**. Ad esempio la relazione "**maggiore o uguale a**" e' riflessiva, mentre quella "**maggiore di**" non lo e'.

Se y***R***x quando x***R***y allora la relazione e' **simmetrica**. Sugli insiemi di interesse comune una relazione simmetrica e' anche riflessiva. Un'eccezione a tale affermazione e', ad esempio, la relazione "**e' cugino di**" che e' simmetrica, ma non e' riflessiva. Le due relazioni $\geq$ e $>$ appena descritte sono ambedue **non simmetriche**.

Infine se x***R***y e y***R***z implica che x***R***z si dice che ***R*** e' una relazione **transitiva**.

Una relazione che soddisfi tutti i tre precedenti criteri viene detta **relazione di equivalenza**. Un esempio di relazione di equivalenza potrebbe essere "**e' membro dello stesso gruppo di**".

Una relazione di equivalenza su un insieme esegue sempre una partizione di tale insieme in sottoinsiemi disgiunti, detti **classi di equivalenza**. Ad esempio l'insieme:

$$\{a,A,b,B,c,C,d,D,e,E\}$$

viene suddiviso nei due sottoinsiemi:

$$\{a,b,c,d,e\} \qquad \{A,B,C,D,E\}$$

se la relazione e' quella di essere, per ambedue gli elementi da essa legati, caratteri minuscoli o maiuscoli. Una diversa partizione si ottiene se la relazione, anch'essa di equivalenza, sta ad indicare che x e y sono la stessa lettera.

Lo stesso intuitivo concetto di uguaglianza e' una relazione di equivalenza. Infatti:

$$x = x \qquad \text{(Riflessivita')}$$

$$y = x \quad \text{se} \quad x = y \qquad \text{(Simmetria)}$$

$$x = z \quad \text{se } x = y \text{ e } y = z \qquad \text{(Transitivita')}$$

Ritornando al postulato 1) precedentemente introdotto, e' chiaro che esso sta ad indicare che, se a = b, a puo' essere sostituito a b in qualsiasi espressione in cui compaia b, senza che cio' vada ad influire sulla validita' dell'espressione.

I rimanenti postulati di Huntington sono:

POSTULATO 2

a) **Esiste una regola di combinazione (+) definita in modo tale che a + b appartiene a K se a e b appartengono ambedue a K**.

b) **Esiste una regola di combinazione (.) definita in modo tale che a.b appartiene a K se a e b appartengono ambedue a K**.

POSTULATO 3

a) **Esiste un elemento 0 in K tale che per ciascun a appartenente a K a + 0 = a** (elemento neutro rispetto alla regola di combinazione +).

b) **Esiste un elemento 1 in K tale che per ciascun a appartenente a K a.1 = a** (elemento neutro rispetto alla regola di combinazione .).

POSTULATO 4

Per le due regole di combinazione vale la proprieta' commutativa.

$$a + b = b + a \qquad \text{(IV a)}$$

$$a \,.\, b = b \,.\, a \qquad \text{(IV b)}$$

POSTULATO 5

Sull'insieme delle due regole di combinazione vale la proprieta' distributiva.

$$a + (b.c) = (a + b).(a + c) \qquad \text{(V a)}$$

$$a \,.\, (b + c) = (a.b) + (a.c) \qquad \text{(V b)}$$

POSTULATO 6

Per ciascun elemento a appartenente a K esiste un elemento a tale che:

$$a.\bar{a} = 0 \qquad \text{e} \qquad a+\bar{a} = 1$$

POSTULATO 7

Esistono almeno due elementi x e y in K tali che $x \neq y$.

Si noti che nessuno dei precedenti postulati fissa in alcun modo il numero di elementi che appartengono a K. Di conseguenza esistono molti sistemi che soddisfano i postulati, di cui alcuni verranno presi in esame nel seguito.

E' necessario osservare la somiglianza di questi postulati con quelli dell'algebra ordinaria. Tuttavia la prima legge distributiva, cioe' la distribuzione rispetto alla somma, non coincide con quella dell'algebra ordinaria.

Un insieme di postulati deve essere **consistente**. Cio' sta ad indicare che nessun postulato dell'insieme deve contraddire qualsiasi altro postulato. Per verificare la consistenza si dovrebbe quindi condurre un esame postulato per postulato in modo da accertare che nessuno di essi contraddica qualsiasi possibile gruppo di altri postulati. Il procedimento tuttavia non e' facile e si puo' allora percorrere una via diversa. E' sufficiente in sostanza individuare un esempio di algebra booleana di cui si conosca in modo indipendente la consistenza. In tal caso, se tutti i postulati di Huntington sono soddisfatti, allora gli stessi postulati sono consistenti.

L'esempio piu' semplice di algebra booleana consiste di due soli elementi, 1 e 0, definiti in modo da soddisfare le seguenti relazioni:

$$\bar{1} = 0 \qquad \bar{0} = 1$$

$$1.1 = 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0.0 = 1.0 = 0.1 = 0$$

Si vede immediatamente che i postulati 1,2,3 e 4 sono soddisfatti con queste definizioni. Ad esempio per il postulato 3b, se a=1 si ha:

$$a . 1 = 1 . 1 = 1$$

mentre se a = 0 si ottiene:

$$a . 1 = 0 . 1 = 0$$

e pertanto a . 1 = a.

Il soddisfacimento della legge commutativa e' evidente e la verifica della legge distributiva richiede solamente di valutare ambedue i membri delle uguaglianze per ogni possibile combinazione di valori di a,b e c.

Infine per quanto riguarda il postulato 6 per a=1 si ha:

$$a.\bar{a} = 1.\bar{1} = 1.0 = 0$$
$$a + \bar{a} = 1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$$

mentre per a= 0 si ottiene:

$$a.\bar{a} = 0.\bar{0} = 0.1 = 0$$

$$a + \bar{a} = 0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$$

In aggiunta alla consistenza assume un notevole interesse la questione dell'**indipendenza** dei postulati. Per indipendenza si intende che nessun postulato puo' essere provato a partire dagli altri.

La dimostrazione dell'indipendenza dei postulati di Huntington e' lunga e complessa. Pertanto, non essendo essenziale per gli sviluppi successivi, essa verra' tralasciata. Non e' infatti indispensabile partire da un insieme di postulati indipendenti. Parecchi autori infatti considerano i teoremi che verranno dimostrati nei paragrafi successivi come dei postulati, senza che cio' comporti alcun inconveniente.

a.7) Il calcolo di verita' visto come un'algebra booleana.

Tra il calcolo funzionale di verita' e l'algebra booleana introdotta al paragrafo precedente esiste una corrispondenza uno a uno.

La tabella A.7.1 interpreta i valori di verita' e i connettivi logici come un elemento o una regola di combinazione in un'algebra booleana.

E' abbastanza usuale che in letteratura non venga fatta una precisa distinzione tra le due colonne di tabella. Infatti molto spesso la regola "." viene chiamata AND e quella "+" OR.

Per l'algebra booleana vale ovviamente il principio di dualita' introdotto al capitolo II. Tale principio si evince chiaramente da un'osservazione appena un po' attenta dei postulati di Huntington, che sono tutti presentati a coppie che possono essere derivate una dall'altra per dualita'.

TABELLA A.7.1

Calcolo di verita'	**Algebra booleana**
$\cap$	.
$\cup$	+
F	**0**
T	**1**
A	**A**

a.8) I teoremi fondamentali dell'algebra booleana.

LEMMA 1) **Gli elementi 0 e 1 sono unici**.

Si supponga per assurdo che esistano due elementi 0, indicati rispettivamente con 0_1 e 0_2. Per ciascuna coppia di elementi a e b appartenenti a K si ha:

$$a + 0_1 = a \qquad \text{e} \qquad b + 0_2 = b$$

Si ponga ora $a = 0_2$ e $b = 0_1$. Si ottiene quindi:

$$0_2 + 0_1 = 0_2 \qquad \text{e} \qquad 0_1 + 0_2 = 0_1$$

Usando la prima legge commutativa e la proprieta' transitiva dell'uguaglianza si ha:

$$0_1 = 0_2$$

Come esempio della dualita', applicata alla dimostrazione precedente si ottiene:

da $\quad a + 0_1 = a \quad b + 0_2 = b$

$\quad a \,.\, 1_1 = a \quad b \,.\, 1_2 = b$

e da $\quad 0_2 + 0_1 = 0_2 \quad 0_1 + 0_2 = 0_1$

$\quad 1_2 \,.1_1 = 1_2 \quad 1_1 + 1_2 = 1_1$

e infine da:

$$0_1 = 0_2$$

si ottiene:

$$1_1 = 1_2$$

<u>LEMMA 2</u>) **Per ciascun elemento a appartenente a K a + a = a e a . a = a**

$a + a = (a + a) \,.\, 1$	(postulato 3b)
$a + a = (a + a).(a + \bar{a})$	(postulato 6)
$a + a = a + a.\bar{a}$	(postulato 5)
$a + a = a + 0$	(postulato 6)
$a + a = a$	(postulato 3a)
$a \,.\, a = a$	(dualita')

<u>LEMMA 3</u>) **Per ciascun a appartenente a K a + 1 = 1 e a . 0 = 0**

$a + 1 = 1 \,.\, (a + 1)$	(postulato 3b)
$a + 1 = (a + \bar{a}).(a + 1)$	(postulato 6)
$a + 1 = a + \bar{a}.1$	(postulato 5)
$a + 1 = a + \bar{a}$	(postulato 3b)
$a + 1 = 1$	(postulato 6)
$a \,.\, 0 = 0$	(dualita')

LEMMA 4) **Gli elementi 1 e 0 sono distinti e $\bar{1} = 0$**

Si supponga che a sia un elemento appartenente a K.

$$a \,.\, 1 = a \qquad \text{(postulato 3 b)}$$

$$a \,.\, 0 = 0 \qquad \text{(lemma 3)}$$

Si assuma ora che 1 = 0. In tal caso le due espressioni precedenti sono soddisfatte solo se a=0. Il postulato 7 tuttavia stabilisce che vi sono almeno due elementi distinti in K. La contraddizione puo' essere risolta solo concludendo che $1 \neq 0$.

Per provare la seconda asserzione e' sufficiente scrivere:

$$\bar{1} = \bar{1}.1 \qquad \text{(postulato 3b)}$$

$$\bar{1} = 0 \qquad \text{(postulato 6)}$$

LEMMA 5) **Per ciascuna coppia di elementi a e b appartenenti a K a + a.b = a e a.(a+b)=a**

$$a + a.b = a.1 + a.b \qquad \text{(postulato 3b)}$$

$$a + a.b = a.(1 + b) \qquad \text{(postulato 4b)}$$

$$a + a.b = a.\ 1 \qquad \text{(lemma 3)}$$

$$a + a.b = a \qquad \text{(postulato 3b)}$$

La seconda asserzione a.(a + b) = a si puo' dimostrare per dualita'

LEMMA 6) **L'elemento $\bar{a}$ definito dal postulato 6 e' unico per ciascun a in K**

La dimostrazione puo' venir fatta per contraddizione. Si supponga che esistano due elementi distinti, a_1 e a_2, che soddisfano il postulato 6. Cioè:

$$a + a_1 = 1 \qquad a + a_2 = 1 \qquad a.a_1 = 0 \qquad a.a_2 = 0$$

Allora:

$$a_2 = a_2.1 \qquad \text{(postulato 3b)}$$

$$a_2 = (a + a_1).a_2 \qquad \text{(per sostituzione)}$$

$$a_2 = a.a_2 + a_1.a_2 \qquad \text{(postulato 5b)}$$

$$a_2 = 0 + a_1.a_2 \qquad \text{(per sostituzione)}$$

$a_2 = a.a_1 + a_1.a_2$ (per sostituzione)

$a_2 = (a + a_2).a_1$ (postulato 5b)

$a_2 = 1.a_1$ (per sostituzione)

$a_2 = a_1$ (postulato 3b)

LEMMA 7) **Per ciascun elemento a in K** $a = \bar{\bar{a}}$

Si ponga $\bar{\bar{a}} = x$. Si ottiene percio':

$\bar{a}.x = 0$ e $\bar{a} + x = 1$ (postulato 6)

ma

$\bar{a}.a = 0$ e $\bar{a} + a = 1$ (postulato 6)

Di conseguenza sia a che x soddisfano il postulato 6 come complemento di a. Per il lemma 6 ne consegue che:

$$a = x$$

LEMMA 8) **a.[(a + b) + c] = [(a + b) + c].a = a**

a.[(a + b) +c] = a.(a + b) + a.c (postulato 5b)

a.[(a + b) +c] = a + a.c (lemma 5)

a.[(a + b) +c] = a = [(a + b) +c].a (postulato 4b e lemma 5)

TEOREMA 9) **Per qualsiasi terna di elementi a,b,c appartenenti a K a + (b + c) = (a + b) + c e a.(b.c) = (a.b).c**

Si intuisce immediatamente che il teorema appena enunciato altro non e' se non l'enunciazione delle proprieta' associative dell'algebra ordinaria. Molto spesso queste proprieta' sono considerate dei postulati, sebbene cio' non sia affatto necessario.

La dimostrazione puo' essere condotta nel modo seguente. Posto:

$$Z = [(a + b) + c].[a + (b + c)]$$

si ricava:

$$Z = [(a + b) + c].a + [(a + b) + c].(b + c)$$

$Z = a + [(a + b) + c].(b + c)$ (lemma 8)

$Z = a + \{[(a + b) + c].b + [(a + b) + c].c\}$ (postulato 5b)

$Z = a + \{b + [(a + b) + c].c\}$ (lemma 8, post. 4b)

$Z = a + (b + c)$

Si puo' tuttavia anche scrivere:

$Z = (a + b).[a + (b + c)] + c.[a + (b + c)]$ (postulato 5b)

$Z = (a + b).[a + (b + c)] + c$ (lemma 8)

$Z = \{a.[a + (b + c)] + b.[a + (b + c)]\} + c$ (postulato 5b)

$Z = \{a.[a + [B + c)] + b\} + c$ (lemma 8)

$Z = (a + b) + c$

e quindi per la proprieta' transitiva

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

e per dualita'

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

Una volta che le leggi associative siano state stabilite, molte espressioni possono essere semplificate omettendo le parentesi. Ad esempio:

$$(a + b) + c = a + b + c$$

$$(a.b).c = a.b.c$$

TEOREMA 10) **Per ciascuna coppia di elementi a e b in K a + a.b = a + b e a.(a + b) = = a.b**

$a + \bar{a}.b = (a + \bar{a}).(a + b)$ (postulato 5a)

$a + \bar{a}.b = a + b$ (postulati 6 e 3b)

$a.(\bar{a} + b) = a.b$ (dualita')

Teorema 11) **Per ciascuna coppia di elementi a e b in K** $a+b=\overline{\bar{a}.\bar{b}}$ **e** $\mathbf{a.b}=\overline{\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}}$

Le espressioni appena citate costituiscono le due forme dell'importantissima legge di De Morgan, gia' vista in precedenza. La seconda forma e' ovviamente la forma duale della prima, ma ci si puo' arrivare, anche a scopo di esercizio, per una via diversa che non quella della dualita'.

$$(a+b)+\bar{a}.\bar{b}=\left[(a+b)+\bar{a}\right]\left[(a+b)+\bar{b}\right] \qquad \text{(postulato 5a)}$$

$$(a+b)+\bar{a}.\bar{b}=\left[\bar{a}+(a+b)\right]\left[\bar{b}+(b+a)\right] \qquad \text{(postulato 4a)}$$

$$(a+b)+\bar{a}.\bar{b}=1.1=1 \qquad \text{(teorema 9, lemma 3)}$$

$$(a+b).(\bar{a}.\bar{b})=a.(\bar{a}.\bar{b})+b.(\bar{b}.\bar{a}) \qquad \text{(postulati 5b, 4b)}$$

$$(a+b).(\bar{a}.\bar{b})=0+0=0 \qquad \text{(teorema 9, lemma 3)}$$

In tal modo ambedue le condizioni del postulato 6 sono state soddisfatte e di conseguenza a + b e' l'unico complemento di $\bar{a}.\bar{b}$. Si puo' quindi scrivere che:

$$a+b=\overline{\bar{a}.\bar{b}} \qquad \text{o} \qquad \overline{a+b}=\bar{a}.\bar{b}$$

Queste espressioni ovviamente valgono anche quando si sostituisca ad a e b le loro negazioni. Si ottiene allora:

$$\overline{\bar{a}+\bar{b}}=\bar{\bar{a}}.\bar{\bar{b}}=a.b$$

oppure

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a.b}$$

dai lemmi 6 e 7.

a.9) La teoria degli insiemi come esempio di algebra booleana.

Si e' gia' visto in precedenza come il calcolo funzionale di verita' sia un esempio di algebra booleana. Poiche' esso soddisfa tutti i postulati di Huntington esso soddisfera' anche ciascuno dei teoremi e dei lemmi enunciati al precedente paragrafo.

La teoria degli insiemi e' un secondo esempio di algebra booleana. Come insieme si puo' intendere una qualsiasi collezione di oggetti, ma per poter parlare di un'algebra degli insiemi e' necessario limitare gli oggetti che li compongono mediante alcuni criteri significativi. Si definisce **insieme universale** quello che contiene tutti gli oggetti che soddisfano tali criteri; per motivi che appariranno chiari piu' avanti, l'insieme universale deve contenere necessariamente almeno un oggetto e la sua cardinalita' puo' essere finita o infinita. La collezione dei punti di un piano o di una regione finita del piano e' un interessante esempio di insieme universale.

Si dice che R e' un sottoinsieme dell'insieme S quando ciascun oggetto di R appartiene anche a S e tale fatto si indica con:

$$R \subset S$$

Solamente gli insiemi che sono sottoinsiemi dell'insieme universale permettono lo sviluppo di un'algebra degli insiemi.

Un secondo insieme di notevole importanza e' l'**insieme nullo** cioe' quello che non contiene nessun oggetto. Gli insiemi universale e nullo vengono di solito rappresentati con i simboli S_u e S_z rispettivamente.

L'**unione** di due insiemi R e S e' quell'insieme che contiene tutti gli oggetti sia di R che si S. L'operazione di unione viene indicata con:

$$R \cup S$$

L'**intersezione** di due insiemi R e S e' invece quell'insieme che contiene tutti gli oggetti che appartengono sia a R che a S. L'intersezione viene indicata con:

$$R \cap S$$

Infine il **complemento di S**, indicato con C(S) contiene tutti gli oggetti dell'insieme universale che non appartengono a S.

Un modo molto efficace per rappresentare un insieme universale e' quello di considerare i punti contenuti in un rettangolo, come illustrato in fig. A.9.1. Sempre nella stessa figura R e S rappresentano due sottoinsiemi dell'insieme universale.

La rappresentazione del tipo appena introdotto prende il nome di **diagramma di Venn**.

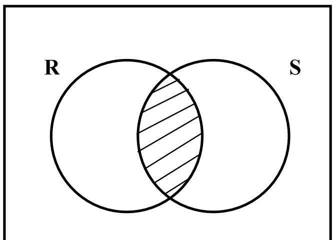

figura A.9.1

L'area tratteggiata di fig A.9.1 rappresenta l'intersezione dei due insiemi R e S. Allo stesso modo le aree tratteggiate di fig A.9.2 rappresentano rispettivamente gli insiemi $R \cup S$ e C(R).

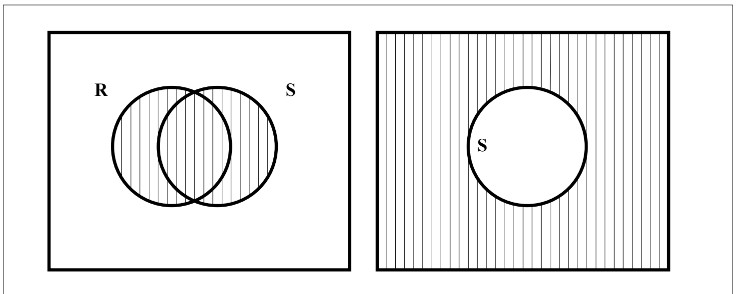

figura A.9.2

Richiamando i postulati del paragrafo a.6 si sceglierà' un set di K oggetti che saranno quegli insiemi che non contengono altri punti se non quelli dell'insieme universale. Tali insiemi, uno dei quali e' l'insieme vuoto, sono sottoinsiemi dell'insieme universale. Se l'uguaglianza e' assunta in modo da metter in relazione unicamente insiemi uguali, allora il postulato 1 e' soddisfatto. Si potrebbe poi procedere sulla base della corrispondenza di tabella 1, in modo da dimostrare che anche i rimanenti postulati sono soddisfatti.

TABELLA 1

$\cap$	$\cdot$
$\cup$	$+$
S_z	0
S_u	1
C(S)	$\overline{S}$

Gli insiemi $A\cap B$ e $A\cup B$ sono sottoinsiemi di S_u tali che il postulato 2 e' soddisfatto.

Poiché $R\cup S_z$ e $R\cap S_u$ contengono esattamente gli stessi oggetti di R, anche il postulato 3 e' soddisfatto. Il soddisfacimento del postulato 4, le leggi commutative, e' evidente.

Sotto l'aspetto della teoria degli insiemi le leggi distributive diventano:

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

e

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

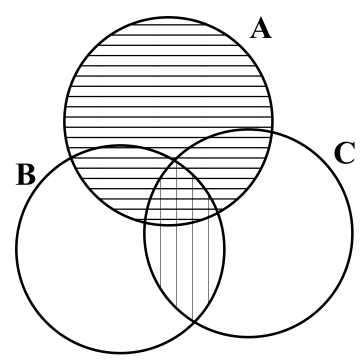

figura A.9.3

Il fatto che queste due equazioni siano soddisfatte si puo' facilmente dimostrare utilizzando i diagrammi di Venn.

Si noti che in fig. A.9.3 l'insieme $B\cap C$ e' tratteggiato verticalmente, mentre l'insieme A e' riempito con un tratteggio orizzontale. L'insieme $A\cup(B\cap C)$ e' rappresentato dall'area comunque tratteggiata.

In fig. A.9.4 l'insieme $A\cup B$ e' indicato con il tratteggio orizzontale, quello $A\cup C$ con un tratteggio verticale. L'intersezione di questi due insiemi $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ e' dato quindi dall'area che contiene ambedue questi tratteggi. Le aree delle due figure A.9.3 e A.9.4, che rappresentano i due membri della prima delle due equazioni relative alle leggi distributive sono ovviamente uguali.

Utilizzando i diagrammi di Venn si perviene alla medesima conclusione anche per la seconda equazione.

Dalla definizione dell'insieme complemento segue immediatamente che:

$$R \cap R = S_z \qquad\qquad R \cup R = S_u$$

e pertanto il postulato 6 e' soddisfatto.

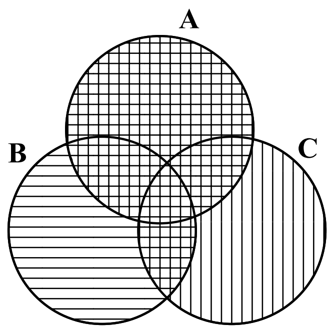

figura A.9.4

Infine il fatto che S_u e S_z siano sempre definiti e distinti garantisce che anche il postulato 7 e' soddisfatto.

Nel seguito si riporta un esempio di utilizzo dell'algebra degli insiemi e di semplificazioni booleane.

ESEMPIO

Tre persone, indicate rispettivamente con A, B e C, collezionano antichi manoscritti. A Raccoglie lavori politici in lingua inglese e romanzi in altre lingue, B raccoglie tutti i lavori politici, eccetto quelli che siano definibili come romanzi in lingua inglese e tutti i lavori in lingua inglese che non siano romanzi. Infine C colleziona tutti quei manoscritti in lingua inglese che non siano classificabili come opere di fantasia oppure lavori politici in lingua diversa dall'inglese. Si vuole determinare quali siano le opere che raccolgono l'interesse di due o piu' dei tre collezionisti.

Si definiscano come prima cosa i vari insiemi che possono essere messi in relazione al problema posto. Siano:

A	l'insieme dei libri collezionati da A
B	l'insieme dei libri collezionati da B
C	l'insieme dei libri collezionati da C
E	l'insieme di tutte le opere in inglese
N	l'insieme di tutti i romanzi

P l'insieme di tutti gli scritti politici

L'insieme di opere collezionato da due o piu' persone sara' simbolicamente espresso da:

$$Z = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Si possono poi esprimere le varie proposizioni del problema nelle seguenti espressioni simboliche della teoria degli insiemi:

$$A = (E \cap P) \cup \left(\overline{E} \cap N\right)$$

$$B = \left(P \cap \overline{E \cap N}\right) \cup \left(E \cap \overline{N}\right)$$

$$C = \left[E \cup \left(\overline{E} \cap P\right)\right] \cap \overline{N}$$

Si noti che sarebbe piu' conveniente, e cosi' verra' fatto nel seguito, usare i simboli dell'algebra booleana anziche' con quelli della teoria degli insiemi (come gia' e' stato fatto per il complemento).

Le tre espressioni ricavate possono venir semplificate. Si ottiene:

$$A = E.P + \overline{E}.N$$

$$B = P.\overline{E.N} + E.\overline{N} = P.\left(\overline{E} + \overline{N}\right) = P.\overline{E} + P.\overline{N} + E.\overline{N} =$$

$$= P.\overline{E} + P.\overline{N}.\left(E + \overline{E}\right) + E.\overline{N} = P.\overline{E} + P.\overline{N}.E + P.\overline{N}.\overline{E} + E.\overline{N} =$$

$$= P.\overline{E}.\left(1 + \overline{N}\right) + E.\overline{N}.(1 + P) = P.\overline{E} + E.\overline{N}$$

$$C = \left(E + \left(\overline{E}.P\right)\right).\overline{N} = (E + P).\overline{N}$$

Sostituendo queste espressioni nella Z si ottiene:

$$Z = \left(E.P + \overline{E}.N\right).\left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right) + \left(E.P + E.\overline{N}\right).(E + P).\overline{N} + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right).(E + P).\overline{N}$$

Per la legge distributiva

$$Z = \left(E.P + \overline{E}.N\right)\left(P.\overline{E} + E.\overline{N} + E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right)\left(E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \left(E.P + \overline{E}.N\right)\left(P.\overline{E} + E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right)\left(E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \left(E.P + \overline{E}.N\right)\left(P.\overline{E} + E.\overline{N} + P.\overline{E}.\overline{N} + P.E.\overline{N}\right) + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right)\left(E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \left(E.P + \overline{E}.N\right)\left(P.\overline{E}.\left(1 + \overline{N}\right) + E.\overline{N}.(1 + P)\right) + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right)\left(E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \left(E.P + \overline{E}.N\right)\left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right) + \left(P.\overline{E} + E.\overline{N}\right)\left(E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \left(P.\overline{E} + \overline{E}.N\right)\left(E.P + \overline{E}.N + E.\overline{N} + P.\overline{N}\right) =$$

$$= \overline{E}.N + P.\overline{E}.\left(E.P + \overline{E}.N + P.\overline{N} =\right)$$

$$= E.\overline{N} + P.\overline{E}.N + P.\overline{E}.\overline{N} = E.\overline{N} + P.\overline{E}.\left(N + \overline{N}\right) = E.\overline{N} + P.\overline{E}$$

Si puo' quindi concludere che le opere cui piu' di una persona e' interessata sono le opere non di fantasia in lingua inglese e gli scritti politici in lingua diversa dall'inglese.

Lo stesso problema poteva ovviamente essere risolto utilizzando i diagrammi di Venn. Si lascia al lettore questa via di soluzione.

Nello sviluppo dell'esempio si sono incontrate piu' volte espressioni del tipo:

$$x.y + \overline{x}.z + y.z$$

la cui semplificazione ha richiesto ciascuna volta un numero considerevole di operazioni elementari. Si puo' tuttavia dedurre il seguente

TEOREMA 12) **Per qualsiasi terna di elementi a, b e c in K** $a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + \overline{a}.c$ **e** $(a+b).(\overline{a}+c).(b+c) = (a+b).(\overline{a}+c)$

Infatti:

$$a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + \overline{a}.c + b.c.(a + \overline{a}) = a.b + a.b.c + \overline{a}.c + \overline{a}.b.c =$$

$$= a.b.(1+c) + \overline{a}.c.(1+b) = a.b + \overline{a}.c$$

Il teorema e' illustrato dal diagramma di Venn di fig. A.9.5. Si noti che l'area b.c e' parzialmente ricoperta da a.b e parzialmente da $\overline{a}.c$.

La seconda parte del teorema si dimostra per dualita'.

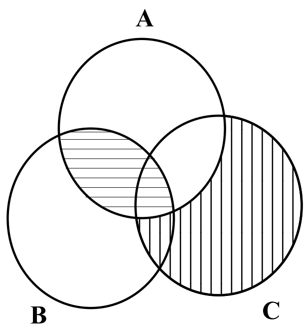

figura A.9.5