CAPITOLO IV
CENNI SULLE MACCHINE SEQUENZIALI

4.1) La macchina sequenziale.

Una macchina sequenziale o macchina a stati finiti *M* e' un automatismo ideale a n ingressi e m uscite definito da:

1) Un insieme finito Q = q_1, q_2 ,...., q_s di **stati interni**.
2) Un insieme finito I = i_1, i_2,...., i_e di **valori degli ingressi** x_1, x_2,...,x_n.
3) Un insieme finito W = w_1, w_2,..., w_k di **valori delle uscite** z_1, z_2,...., z_m.
4) Un insieme di regole detto **mappa di transizione** τ che specifica lo stato q' raggiunto dalla macchina a partire dallo stato q per effetto dell'ingresso i.
5) Un insieme di regole detto **mappa delle uscite** U che specifica il valore w' assunto dalle uscite z_1,....,z_m per effetto dell'ingresso i applicato allo stato q.

La macchina sequenziale e' pertanto definita dai cinque insiemi citati.

$$M = (\mathrm{Q}, \mathrm{I}, \mathrm{W}, \tau, \mathrm{U})$$

Si dicono **complete**, o completamente specificate, le macchine che a partire da ogni stato ammettono qualsiasi valore di ingresso, specificando per ognuno di essi i valori q' e w'; incomplete in caso contrario. Si dice **sequenza degli ingressi, delle uscite o degli stati** qualsiasi successione ordinata di elementi di I,W o Q.

Una macchina sequenziale viene di solito rappresentata con un grafo, detto **diagramma degli stati**, che puo' essere assegnato in due forme diverse, dette rispettivamente modello di Moore o modello di Mealy. Nel primo le uscite della macchina dipendono unicamente dallo stato. Ogni stato q e' rappresentato da un nodo del grafo; i nodi sono a loro volta collegati da segmenti orientati secondo quanto stabilito dalla mappa di transizione.

In fig. 4.1.1 e' riportato il diagramma secondo il modello di Moore di una macchina incompleta a tre stati.

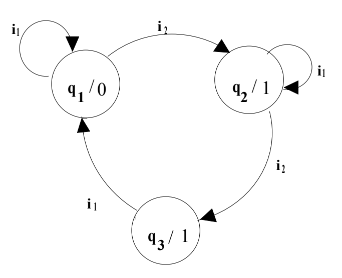


figura 4.1.1

Nel modello di Mealy le uscite dipendono invece sia dagli stati che dagli ingressi; i segmenti orientati che uniscono i nodi rappresentativi degli stati realizzano quindi sia la mappa di transizione che la mappa delle uscite. In fig. 4.1.2 e' riportato il diagramma degli stati secondo il modello di Mealy della stessa macchina di fig. 4.1.1.

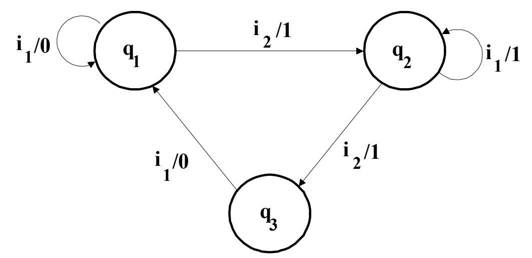


figura 4.1.2

Una terza rappresentazione molto usata e' la tavola di flusso di Huffman, cioe' una rappresentazione tabellare con tante righe quanti sono gli stati e tante colonne quanti sono gli ingressi. La generica casella, di coordinate q e i contiene lo stato q' e l'uscita w' ottenuta applicando l'ingresso i allo stato q. In fig. 4.1.3 e' riportata la tavola di flusso della macchina di fig. 4.1.1 e 4.1.2.

	ingresso	
Stato	**i_1**	**i_2**
q_1	**q_1 / 0**	**q_2 / 1**
q_2	**q_2 / 1**	**q_3 / 1**
q_3	**q_1 / 0**	**- / -**

figura 4.1.3

Le due rappresentazioni di Moore e Mealy sono perfettamente equivalenti. Per passare dal diagramma degli stati secondo Moore a quello secondo Mealy e' sufficiente eliminare l'uscita da ogni nodo riportandola sui segmenti orientati entranti nel nodo stesso. Un esempio e' illustrato in fig. 4.1.4.

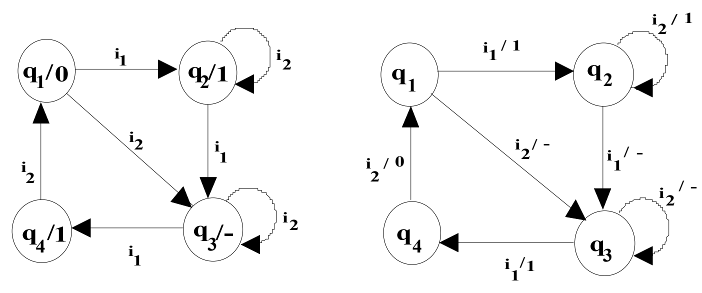


figura 4.1.4

Non altrettanto semplice e' il passaggio dal diagramma secondo Mealy a quello secondo Moore essendo in quest'ultimo l'uscita legata allo stato.

E' infatti necessario costruire un grafo con tanti nodi quanti sono gli stati raggiunti con diverso valore dell'uscita dai segmenti orientati, realizzandolo in modo che conservi le relazioni τ e U del grafo originario.

Si abbia ad esempio la macchina sequenziale rappresentata con il modello di Mealy di fig. 4.1.5.

Mentre lo stato q_3 viene raggiunto da due segmenti orientati, ciascuno con uscita pari a 1, lo stato q_4 e' raggiunto da due segmenti orientati ciascuno relativo a un diverso valore dell'uscita. Esso va quindi sdoppiato, nella rappresentazione secondo Moore,in due stati diversi q_{41} e q_{40} come illustrato in fig. 4.1.6.

Stato	i_1	i_2
q_1	$q_4/1$	$q_3/1$
q_2	$q_1/0$	-
q_3	$q_4/0$	-
q_4	$q_2/0$	$q_3/1$

figura 4.1.5

E' immediato verificare che la stessa sequenza di ingressi applicata alle due macchine produce la stessa sequenza di uscite.

Stato	i_1	i_2
$q_1/0$	q_{41}	q_3
$q_2/0$	q_1	-
$q_3/1$	q_{40}	-
$q_{40}/0$	q_2	q_3
$q_{41}/1$	q_2	q_3

figura 4.1.6

E' da notare che i diagrammi di stato possono essere costruiti a partire da una descrizione verbale del comportamento voluto per la macchina.

Si voglia ad esempio costruire il diagramma di stato della macchina avente come ingressi i bit di ordine j di due numeri binari A e B da sommare; la macchina possa esistere solamente in due stati q_0 e q_1 che rappresentano il valore assunto dal riporto della somma al rango j-1.

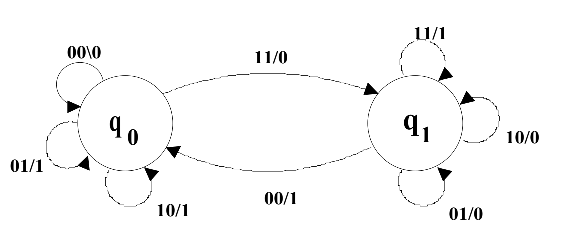


figura 4.1.7

Il diagramma secondo Mealy si ricava in modo banale ed e' illustrato in fig. 4.1.7. mentre il diagramma secondo Moore, notevolmente piu' complesso e' riportato in fig. 4.1.8.

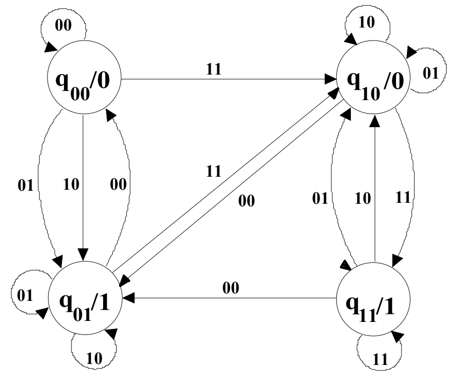


figura 4.1.8

Quale ulteriore esempio si voglia determinare il diagramma di stato di una macchina *M* ad un ingresso e tre uscite Z_1, Z_2, Z_3 una sola delle quali ha valore 1. Se Z_j e' l'uscita a 1, al variare dell'ingresso da 0 a 1 Z_j si annulla, mentre passa a 1 Z_{j+1}.

Si intuisce immediatamente che l'uscita dipende unicamente dallo stato; e' semplice quindi ricavare il diagramma secondo il modello di Moore, come illustrato in fig. 4.1.9 (a), mentre in fig. 4.1.9 (b) e' riportato il diagramma degli stati della stessa macchina secondo Mealy.

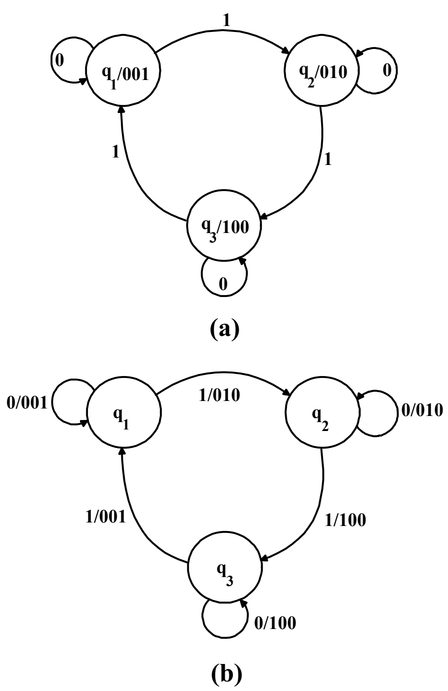
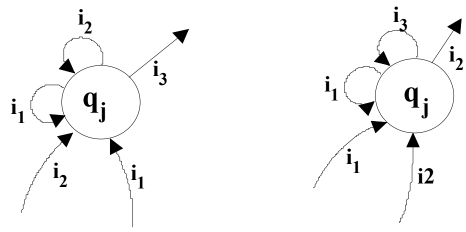


figura 4.1.9

4.2) Alcune definizioni relative alle macchine sequenziali.

1) Uno stato q_j di una macchina *M* si dice **stabile** se ogni ingresso che porta a q_j lascia la macchina in q_j . In fig. 4.2.1 (a) e' illustrato un esempio di stato stabile.

2) Uno stato q_j di una macchina *M* si dice **instabile** se esiste almeno un ingresso i che porta a q_j e successivamente fa evolvere la macchina verso uno stato q_k diverso da q_j. Un esempio e' riportato in fig. 4.2.1 (b)



(a) (b)

figura 4.2.1

3) Una macchina sequenziale e' detta **asincrona** se ogni suo stato e' stabile, **sincrona** se esiste almeno uno stato instabile. Ne deriva che una macchina asincrona puo' cambiare di stato solo in conseguenza di una variazione degli ingressi; in definitiva una sequenza di ingressi i_j, i_j, i_k, i_k, i_k, i_m, i_m ha lo stesso effetto della sequenza i_j, i_k, i_m e produce la stessa sequenza d'uscita.

4) Una **sequenza** di ingresso i_1, i_2,....., i_p si dice **applicabile** alla macchina *M* nello stato q, se per ogni i_j su q_j $(1 < j < p-1)$ esiste lo stato q_{j+1} e se e' definita l'uscita finale $w(q_p,i_p)$.

5) Una macchina sequenziale *M'* si dice **equivalente** a una macchina sequenziale *M* se tutte le sequenze di ingresso σ_i applicabili ad uno stato q di *M* sono applicabili ad uno stato q' di *M'* e producono la stessa uscita finale w' = w, qualsiasi sia σ_i. In altre parole ogni sequenza di ingresso produce in *M'* una sequenza di uscite coincidente con la σ_w di *M* almeno in tutti i valori specificati di quest'ultima.Si noti che, secondo quanto appena definito, l'equivalenza tra due macchine sequenziali non gode della proprieta' di simmetria. Infatti, se una macchina *M'* a partire dallo stato generico q' sotto la sequenza i_1,...., i_n produce le uscite w_1, w_2, -,...., w_n e la macchina *M* sotto la stessa sequenza produce a partire da q la sequenza w_1, w_2, w_3,...., w_n allora la macchina *M* e' equivalente a *M'*, mentre non e' vero il contrario.

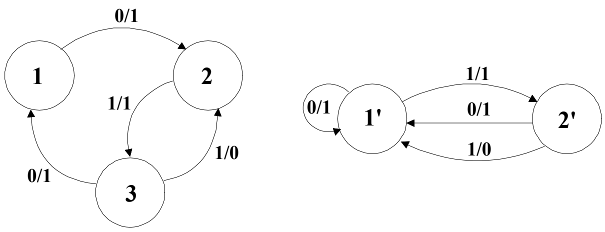


figura 4.2.2

In fig. 4.2.2 e' riportata una macchina *M'* equivalente a una macchina *M*. Infatti in *M'* le sequenze di uscita ottenibili a partire dagli stati 1' e 2' sono uguali a quelle ottenibili applicando le stesse sequenze di ingresso alla coppia di stati 1-2 e 3 di *M* rispettivamente.

6) Si dice **macchina minima** equivalente a una macchina *M* quella tra le macchine *M'* con il minimo numero di stati. Il procedimento di ricerca della macchina minima prende il nome di minimizzazione degli stati di *M*.

4.3) Minimizzazione degli stati di una macchina sequenziale.

E' bene notare che una macchina sequenziale e' caratterizzata non tanto dalla forma del suo diagramma di stato o dal numero degli stati, quanto dalla corrispondenza tra l'insieme delle sequenze di ingresso e l'insieme delle sequenze di uscita.

Si supponga ora che esistano due stati q_j e q_k tali che:

1) Qualsiasi sequenza di ingresso $\sigma_i = i_1, i_2, ..., i_p$ applicabile a q_j sia anche applicabile a q_k.
2) L'uscita finale $w(q_{pk}, i_p)$ sia sempre uguale a $w(q_{pj}, i_p)$, qualunque sia σ_i, avendo indicato con q_{pj} lo stato finale raggiunto a partire da q_j per effetto di σ_i.

Se le condizioni enunciate sono realizzate, allora la macchina *M*, una volta giunta nello stato q_j, generera' per ogni sequenza di ingresso una sequenza di uscita i cui elementi, se specificati, coincidono con quelli generati da σ_i a partire da q_k . Si dice allora che l'evoluzione di *M* a partire da q_k e' non in contrasto con l'evoluzione a partire da q_j.

Si tenga ora presente che per le macchine complete ogni sequenza e' applicabile e genera sequenze d'uscita completamente specificate. Per queste macchine quindi, se le condizioni 1 e 2 sussistono per q_k in relazione a q_j, esse devono sussistere anche per q_j nei confronti di q_k. Dal punto di vista delle uscite percio' l' evoluzione di *M* a partire da q_j e q_k sono indistinguibili e gli stati q_j e q_k si dicono **equivalenti**.

$$(q_j = q_k)$$

E' possibile allora considerare q_j e q_k un unico stato q_e, fusione dei due stati originali, se si fa in modo che tutti gli ingressi che portavano *M* in q_j e/o q_k la portino ora nel nuovo stato q_e. In pratica cio' si puo' fare cancellando nella tavola di flusso la riga q_k e sostituendo ovunque q_j a q_k . Il discorso vale ovviamente per qualunque numero di stati. Si puo' dimostrare che il procedimento di fusione degli stati e' univoco e porta ad una partizione degli stati stessi in classi di stati equivalenti.

Per le macchine incomplete l'esistenza di condizioni non specificate in qualche sequenza di uscita fa si' che le condizioni 1 e 2 possano essere valide per q_j nei confronti di q_k, ma non viceversa. Possono infatti esistere sequenze di ingresso applicabili a q_k ma non a q_j. Si parla allora di stati compatibili ($q_j \sigma q_k$) e non di stati equivalenti. Tuttavia, anche se l'evoluzione di *M* a partire da q_j e' diversa da quella che parte da q_k, tali stati possono ancora essere fusi allo stesso modo illustrato in precedenza, assegnando alle uscite non specificate della $\sigma_w(q_j)$ i valori specificati della $\sigma_w(q_k)$.

Si noti infine che se per una macchina

$$q_j = q_k \quad \text{e} \quad q_j = q_e \qquad \text{allora} \quad q_k = q_e$$

e i tre stati q_j, q_k, q_e possono comunque essere fusi in un unico stato.

Se viceversa

$$q_j \ \sigma \ q_k \quad e \quad q_j \ \sigma \ q_e$$

allora non e' detto che sia:

$$q_k \ \sigma \ q_e$$

Se q_k non e' compatibile con q_e i tre stati non possono essere fusi in un unico stato, ma q_j va fuso con q_k e/o q_e. La minimizzazione delle macchine incomplete non porta quindi ad un'unica soluzione, ma da' di solito la possibilita' di scelta tra un certo numero di risultati diversi.

4.4) Minimizzazione degli stati con il metodo di Ginsburg.

Il procedimento di minimizzazione degli stati proposto da Ginsburg e' uno dei piu' semplici tra i tanti proposti allo scopo e si applica alla tavola di flusso della macchina da minimizzare. E' un procedimento esaustivo e fornisce **tutte e sole le coppie di stati compatibili** (o eventualmente equivalenti) della macchina *M*.

Prima di applicare il metodo e' comunque conveniente eliminare dalla tavola di flusso gli stati doppi. Sono cosi' definiti quegli stati che hanno ugual valore di prossimo stato e di uscita in corrispondenza a ciascun ingresso. Se esiste quindi uno stato q' doppio di q, esso puo' venir eliminato dalla tavola di flusso cancellando la riga q' e sostituendo ovunque q' con q. Un esempio di eliminazione di uno stato doppio e' riportato in fig. 4.4.1.

stato	**i_1**	**i_2**
1	**2/1**	**3/0**
2	**3/0**	**4/1**
3	**2/1**	**1/0**
4	**2/1**	**3/0**

stato	**i_1**	**i_2**
1	**2/1**	**3/0**
2	**3/0**	**1/1**
3	**2/1**	**1/0**

figura 4.4.1

Una volta che gli stati doppi siano stati eliminati inizia la vera e propria ricerca degli stati compatibili (o equivalenti), che vengono individuati a coppie per esclusione di quelle formate da stati non compatibili. Si inizia infatti escludendo le coppie q_m,q_p che hanno uscite diverse per almeno un ingresso i.

Infatti le coppie di stati equivalenti, se esistono, saranno un sottoinsieme delle coppie q_h, q_m per cui si ha:

$$w(q_h,i) = w(q_m,i)$$

qualunque sia i. Le coppie di stati per le quali vale la relazione appena scritta vengono dette compatibili rispetto all'uscita ($q_h \ \alpha \ q_m$).

Individuate tali coppie si costruisce una tabella con tante righe quante sono le coppie compatibili rispetto all'uscita e tante colonne quanti sono gli ingressi. In ogni casella vengono riportate le coppie di stati verso cui evolve *M* per effetto del rispettivo ingresso a partire dalla coppia di stati che identifica la riga.

Si esamina successivamente tale tabella. Se in una casella di coordinate generiche q_j, q_k, i si riscontra la presenza di una coppia di stati non compatibile rispetto all'uscita, allora la coppia q_j, q_k non e' formata da stati equivalenti poiche' per lo stesso ingresso i essi evolvono verso stati con uscita diversa.

la riga q_j, q_k va allora cancellata dalla tabella assieme a tutte le coppie q_l, q_m che evolvono verso q_j, q_k. Si continua in tal modo finche' non e' piu' possibile cancellare alcuna coppia.

A questo punto le coppie che rimangono sono formate da stati compatibili (equivalenti). Infatti ognuna di tali coppie, evolvendo verso coppie di stati a loro volta compatibili rispetto all'uscita, realizza sequenze di uscita compatibili per qualsiasi sequenza di ingressi applicata.

Quale ultimo passo si cerca di mettere in evidenza relazioni di mutua compatibilita' tra le coppie, formando gruppi di n.(n-1)/2 coppie da un insieme di n stati, con n massimo, in modo che in ciascuno di tali gruppi ogni stato sia legato in coppia con i rimanenti n-1.

Cio' fatto si possono distribuire gli stati di *M* in s sottoinsiemi S_1, S_2,......,S_s con s minimo, in modo che

1) Ogni S_i contenga solo stati compatibili.
2) Ogni stato q_j di *M* sia contenuto in almeno un sottoinsieme S_i. Se M e' una macchina completa q_j comparira' in uno solo degli S_i.
3) Per ogni ingresso i e ogni sottoinsieme S_j esista un S_k tale che l'ingresso i faccia evolvere tutti gli stati di S_j in stati di S_k.

I sottoinsiemi S definiscono una partizione sull'insieme degli stati di *M* e ciascuno di essi puo' essere sostituito da un unico stato, giungendo in tal modo alla macchina minima *M'*.

Nel seguito sono riportati alcuni esempi di minimizzazione del numero degli stati.

ESEMPIO 1

Sia assegnata la seguente macchina sequenziale:

Stato	$\mathbf{i_1}$	$\mathbf{i_2}$	$\mathbf{i_3}$
1	**4/00**	**4/11**	**4/11**
2	**5/01**	**4/10**	**2/01**
3	**4/00**	**5/00**	**6/00**
4	**5/01**	**6/10**	**2/01**
5	**6/00**	**6/11**	**6/11**
6	**1/01**	**6/10**	**2/01**

La macchina e' completa e non esistono stati doppi. Il diagramma di stato di tale macchina e' riportato in fig. 4.4.2. Le coppie di stati α-compatibili , cioe' compatibili rispetto all'uscita, sono le coppie 1,5 2,4 2,6 e 4,6. La tabella di evoluzione delle coppie e' la seguente:

Stato	**i_1**	**i_2**	**i_3**
1,5	**4,6**	**4,6**	**4,6**
2,4	**5,5**	**4,6**	**2,2**
2,6	**5,1**	**4,6**	**2,2**
4,6	**5,1**	**6,6**	**2,2**

Nessuna riga della tabella va cancellata in quanto ciascuna coppia per qualsiasi ingresso evolve verso una coppia a sua volta a-compatibile.

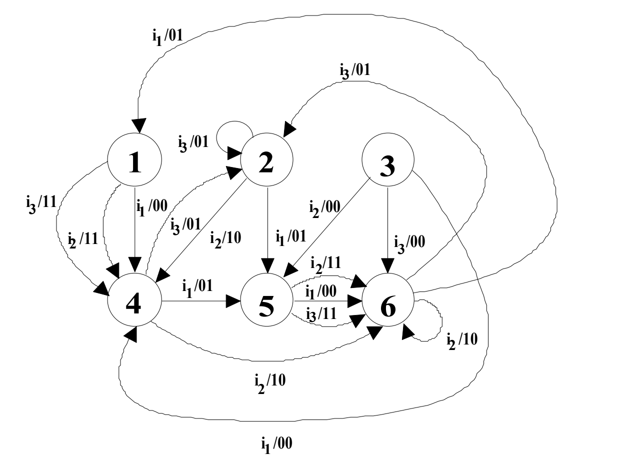


figura 4.4.2

Tutte le coppie della tabella sono quindi coppie di stati equivalenti. Esiste peraltro una relazione di mutua compatibilita' tra le coppie:

2,4 2,6 4,6

e quindi i tre stati 2,4,6 possono essere fusi in un unico stato. Nell'esempio considerato quindi gli stati della macchina *M* di partenza possono essere distribuiti nei tre sottoinsiemi:

$S_1 = \{1,5\}$ $S_2 = \{2,4,6\}$ $S_3 = \{3\}$

Fondendo ora gli stati di ciascun sottoinsieme in un unico stato, si ottiene la macchina minima *M'*, la cui tavola di flusso e':

Stati equivalenti	**Stati di M'**	**i_1**	**i_2**	**i_3**
1,5	**1'**	**2'/00**	**2'/11**	**2'/11**
2,4,6	**2'**	**1'/01**	**2'/10**	**2'/01**
3	**3'**	**2'/00**	**1'/00**	**2'/00**

Il diagramma degli stati di M' e' riportato in fig. 4.4.3.

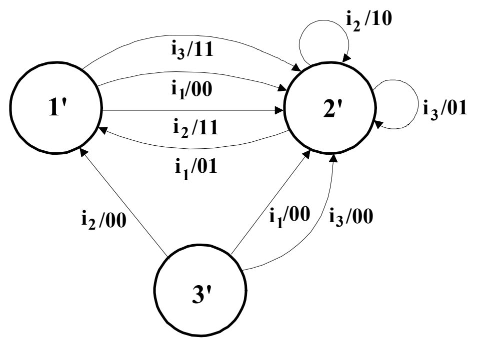


figura 4.4.3

ESEMPIO 2

Minimizzare gli stati della macchina completa, la cui tavola di flusso e':

Stato	i_1	i_2	i_3	i_4
1	1/4	4/1	6/3	6/4
2	6/3	4/3	1/1	7/4
3	3/3	6/2	4/4	8/1
4	6/3	4/3	5/1	3/4
5	1/4	4/1	6/3	6/4
6	3/1	5/3	6/2	3/3
7	7/3	6/2	2/4	8/1
8	1/3	8/2	4/4	6/1

Lo stato 5 e' doppio dello stato 1 e pertanto puo' venir eliminato. Le coppie di stati α-compatibili sono:

2,4 3,7 3,8 7,8

La tabella di evoluzione delle coppie di stati e' riportata in fig. 4.4.4.

Coppie di stati	i_1	i_2	i_3	i_4
2,4	6,6	4,4	1,1	3,7
3,7	3,7	6,6	4,2	8,8
3,8	3,1	6,8	4,4	8,6
7,8	7,1	6,8	2,4	8,6

figura 4.4.4

Dall'esame di tale tabella si ricava che:

a) La coppia di stati 3,8 evolve verso le coppie non α-compatibili 3,1 e 6,8 e va pertanto eliminata.

b) La coppia 7,8 evolve verso le coppie non α-compatibili 7,1 e 6,8 e quindi va anch'essa eliminata.

Rimangono allora le coppie di stati equivalenti 2,4 e 3,7. La partizione eseguibile sull'insieme degli stati della macchina *M* di partenza e' allora:

{1} {2,4} {3,7} {6} {8}

La macchina equivalente minima *M'* e' :

Stati di M	Stati di M'	i_1	i_2	i_3	i_4
1	1'	1'/4	2'/1	4'/3	4'/4
2,4	2'	4'/3	2'/3	1'/1	3'/4
3,7	3'	3'/3	4'/2	2'/4	5'/1
6	4'	3'/1	1'/3	4'/2	3'/3
8	5'	1'/3	5'/2	2'/4	4'/1

ESEMPIO 3

Si minimizzi la seguente macchina incompleta.

Stati	i_1	i_2
1	1/-	2/1
2	3/1	1/1
3	2/0	1/1

Non vi e' alcun stato doppio, mentre le coppie α-compatibili sono la 1,2 e la 1,3. Si ha:

Coppie di stati	i_1	i_2
1,2	1,3	2,1
1,3	1,2	2,1

Ambedue le coppie di tabella sono coppie di stati compatibili. L'unico modo per avere una macchina minima *M'* a due stati e' quello di formare i sottoinsiemi non disgiunti:

{1,2} {1,3}

e la macchina minima e':

Stati di M	Stati di M'	i_1	i_2
1,2	1'	2'/1	1'/1
1,3	2'	1'/0	1'/1

Si noti che, mentre la macchina di partenza e' una macchina incompleta, la macchina minima *M'* risulta completamente specificata.

ESEMPIO 4

Si voglia minimizzare la seguente macchina sequenziale:

Stati	i_1	i_2	i_3	i_4
1	-/-	5/0	4/1	3/1
2	3/-	2/1	4/-	1/0
3	6/1	5/1	1/1	3/0
4	-/-	6/0	-/-	6/1
5	5/1	1/0	-/-	3/1
6	5/1	-/-	4/1	-/-

Non vi e' alcun stato doppio, mentre le coppie compatibili rispetto all'uscita si possono individuare in:

1,4 1,5 1,6 2,3 2,6 3,6 4,5 4,6 5,6

La tabella di evoluzione delle coppie di stati e' riportata in fig. 4.4.5.

Coppie di stati	i_1	i_2	i_3	i_4
1,4	-,-	5,6	4,-	3,6
1,5	-,5	5,1	4,-	3,3
1,6	-,5	5,-	4,4	3,-
2,3	3,6	2,5	4,1	1,3
2,6	3,5	2,-	4,4	1,-
3,6	6,5	5,-	1,4	3,-
4,5	-,5	6,1	-/-	6,3
4,6	-,5	6,-	-,4	6,-
5,6	5,5	1,-	-,4	3,-

figura 4.4.5

La coppia 2,3 va eliminata in quanto evolve verso le coppie 2,5 e 1,3, formate da stati non compatibili rispetto all'uscita. La coppia 2,6 evolve verso la coppia 3,5 formata da stati non compatibili e va quindi anch'essa eliminata.

Tra le coppie:

1,4 1,5 1,6 4,5 4,6 5,6

puo' essere messa in luce una relazione di mutua compatibilita'. Gli stati 1,4,5,6 possono pertanto essere fusi in un unico stato.

La macchina minima che si ricava e' quindi una macchina a tre stati con la seguente tavola di flusso:

Stati di M	Stati di M'	i_1	i_2	i_3	i_4
1,4,5,6	1'	1'/1	1'/0	1'/1	3'/1
2	2'	3'/-	2'/1	1'/-	1'/0
3,6	3'	1'/1	1'/1	1'/1	3'/0

Si noti che in questo caso la macchina minima che si ricava e' ancora una macchina incompleta.