SERIE NUMERICHE

Vogliamo dare un senso al concetto di "somma di infiniti addendi".

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$$

L'idea è quella di "passare al limite" rispetto al numero di addendi.

Ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 2^{-n}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

Per prima cosa però dobbiamo dare una definizione formale di cosa sia una serie.

Definizione

Una serie di numeri reali è una coppia di successioni

$S = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}})$

tale che $(\forall k\in\mathbb{N})\ (s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n)$.

La successione $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si dice "successione delle somme parziali" della serie, e $(\forall k\in\mathbb{N})$ s_k si dice "somma parziale" dei primi k termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Data una serie $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}})$ diamo la seguente definizione

Def.

La serie $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}})$ si dice convergente (o sommabile) $\Leftrightarrow$ $\exists$ finito $\lim_{k\to\infty} s_k = s \in \mathbb{R}$;

si dice divergente $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{k\to+\infty} s_k = \pm\infty$

si dice indeterminata $\Leftrightarrow$ la successione $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non è né convergente né divergente.

Notazione

D'ora in poi per indicare la serie $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}})$ useremo il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Con abuso di notazione useremo lo stesso simbolo per indicare la somma di tale serie, ovvero $s = \lim_{k\to\infty} s_k$, quando tale somma esiste (finita o infinita).

ESEMPIO - LA SERIE GEOMETRICA

Consideriamo la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$
e vediamo cosa succede a seconda del valore di q.

·) se $q=1$, si ha
$$s_k = 1^0 + 1^1 + \dots + 1^k = k+1$$
e quindi $s_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$

Quindi la serie è divergente.

·) se $q=-1$, si ha
$$s_k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^k$$
$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \pm 1$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$
Quindi $(s_k)_k$ è indeterminata e di conseguenza la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata.

·) se $|q| < 1$, si ha:

$$\begin{aligned} S_k &= 1+q+\dots+q^k \\ &= 1+q+\dots+q^k+q^{k+1}-q^{k+1} \\ &= 1+q(1+\dots+q^k)-q^{k+1} \\ &= 1+qS_k-q^{k+1} \end{aligned}$$

da cui

$$S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

se $|q|<1$, $\lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{1-q}$

e quindi scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

·) se $q>1$, ripetendo il ragionamento si ha

$$S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$$

quindi scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

·) se $q<-1$,

$$S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1+|q|^{k+1}}{1+|q|} & k \text{ dispari} \\ \frac{1-|q|^{k+1}}{1+|q|} & k \text{ pari} \end{cases}$$

$\Rightarrow (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indeterminata.

TEST DI CAUCHY

Si tratta di una condizione <u>necessaria</u> per la convergenza di una serie.

PROPOSIZIONE

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dim.

Osserviamo che $a_n = s_n - s_{n-1}$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} =$

$$= S - S = 0$$

dove $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. ▨

OSSERVAZIONE

La condizione <u>non</u> è sufficiente.

Consideriamo infatti la <u>serie armonica</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Chiaramente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, così la serie "passa" il test di Cauchy.

Vedremo però che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non è convergente.

Infatti innanzitutto osserviamo che

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n$$

per cui $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

Inoltre:

$$1 \geq 0 = 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$s_1 = 1 \geq 0$$

$$s_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$s_4 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$s_8 \geq 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Si vede che

$$s_{16} \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$$

Quindi:

$S_{2^0} \geq 0 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{2^1} \geq 1 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{2^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{2^3} \geq 3 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{2^4} \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$

. . . . . .

in generale $S_{2^n} \geq n \cdot \frac{1}{2}$

e quindi $\lim_{k \to \infty} S_k = +\infty$.

OPERAZIONI CON LE SERIE

Dalle proprietà dei limiti segue che:

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \in \mathbb{R}$

e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s + \beta t.$$

2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

Altre situazioni vanno studiate con un'analisi ad hoc.

SERIE TELESCOPICHE

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione t.c.

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$$

Sia $a_n := b_n - b_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è sommabile e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_\infty - b_0 .$$

Infatti $\forall\, k$ si ha

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} (b_n - b_{n-1}) =$$

$$= (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_k - b_{k-1})$$

$$= b_k - b_0$$

e quindi $\lim_{k\to\infty} S_k = b_\infty - b_0$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

poniamo $b_n = \frac{1}{n}$, $b_\infty = 0$.

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -(b_\infty - b_1) = b_1 = 1$

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

PROPOSIZIONE

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente allora è convergente.

Dim.

Sia $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \qquad t_n := \sum_{j=0}^{n} |a_j|$.

Per ipotesi sappiamo che $(t_n)_n$ è convergente. Dobbiamo dimostrare che allora $(s_n)_n$ è convergente. Dimostreremo che $(s_n)_n$ è di Cauchy, utilizzando il fatto che $(t_n)_n$ lo è.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\ n, m \geq \bar{n}$, si ha $|t_n - t_m| \leq \varepsilon$.

Siano allora $m \geq n \geq \bar{n}$. Si ha

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| =$$

$$= t_m - t_n = |t_m - t_n| \leq \varepsilon .$$

Quindi $(s_n)_n$ è di Cauchy, e quindi converge. $\square$

Osservazione

Non vale il viceversa. Infatti vedremo che $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non è convergente.

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice "a termini non negativi" $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è a termini non negativi, posto $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j$ allora si ha $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$.

Quindi $(s_n)_n$ è una successione non decrescente. Se pure che (s_n) o diverge a $+\infty$, oppure converge a $s := \sup_n s_n$.

Abbiamo quindi:

PROPOSIZIONE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi.

Sia $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$, dove $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$.

Allora se $s = +\infty$ la serie diverge, mentre se $s<+\infty$ la serie converge, e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

In particolare, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non può essere indeterminata. $\square$

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI (NON NEGATIVI)

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con

$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, allora anche

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

Dim.

Sia $\quad s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \qquad t_n := \sum_{j=0}^{n} b_j$

$s := \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \qquad t := \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n$.

Si ha $\quad s_n \leq t_n \quad \forall n$

da cui $\quad s_n \leq t \quad \forall n$

e quindi $s \le t < +\infty$. $\boxtimes$

Criterio del confronto generalizzato

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ t.c.

$a_n \geq 0 \ \forall n$; $b_n \geq 0 \ \forall n$ e

$a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n^*$.

Allora se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Dim.

Sia $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_n \qquad t_n := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$,

$s := \sup_n s_n \qquad t := \sup_n t_n$.

Se $n \geq n^*$, si ha:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_n = \sum_{j=0}^{n^*} a_n + \sum_{j=n^*+1}^{n} a_n$$

$$= s_{n^*} + \sum_{j=n^*+1}^{n} a_j \leq s_{n^*} + \sum_{j=n^*+1}^{n} b_j =$$

$$= s_{n^*} - t_{n^*} + \sum_{j=0}^{n} b_j \leq s_{n^*} - t_{n^*} + t$$

$$< +\infty$$

$\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente

$\Rightarrow s := \sup_n s_n < +\infty \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. $\boxtimes$

ESEMPIO

Confrontiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Si ha che $\displaystyle\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

e poiché $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ è una serie telescopica convergente, allora anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

Inoltre:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è divergente se $0<\alpha\leq 1$

e convergente se $\alpha \geq 2$.

Infatti se $0<\alpha\leq 1$, allora $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n$

mentre se $\alpha \geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$.

Vedremo in seguito che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente $\forall\, n > 1$.

CRITERIO DEL RAPPORTO ASINTOTICO

Siano $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $a_n > 0$ e $b_n > 0$.

Supponiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$,

con $0 < l < +\infty$.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere, cioè o sono entrambe convergenti o sono entrambe divergenti.

<u>Dim.</u>

Sia $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$.

$\exists\, n^*$ t.c. $\forall\, n \geq n^*$

$$\frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{l}{2} = \frac{3}{2} l .$$

Quindi $\forall\, n \geq n^*$ si ha

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3l}{2} b_n$$

e la tesi segue dal criterio del confronto generalizzato. $\boxtimes$

<u>Variante del criterio del confronto asintotico</u>

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con

$a_n \geq 0$ $\forall\, n$ e $b_n > 0$ $\forall n$.

Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Allora se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Dim.

Sia $\varepsilon = 1$. Allora $\exists\, n^* \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n^*$

si ha $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Quindi

$a_n \leq b_n$.

La tesi segue dal criterio del confronto generalizzato. $\blacksquare$

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hanno

lo stesso carattere perché $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

Quindi divergono entrambe.

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0\ \forall n$.

Supponiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Allora

i) se $0 \leq l < 1$ la serie converge.

ii) se $l > 1$ la serie diverge

iii) se $l = 1$ il criterio è inefficace

Dim.

i) sia l' t.c. $l < l' < 1$.
poiché $a_n^{1/n} \to l$, allora $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n^{1/n} < l'$$

e quindi $\forall\, n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq (l')^n .$$

Per il criterio del confronto generalizzato, applicato a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (l')^n$, poiché $0 < l' < 1$, otteniamo la tesi.

ii) Poiché $(a_n)^{1/n} \to l > 1$, allora $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall\, n \geq \bar{n}$ si ha $a_n^{1/n} > 1$

e quindi $a_n > 1$. Quindi non è soddisfatto il test di Cauchy e quindi la serie non è convergente. Essendo a termini non negativi, allora deve essere divergente.

iii) Consideriamo
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente.

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\log\frac{1}{n}} = 1.$$

Quindi abbiamo dato due esempi in cui $l=1$; nel primo la serie diverge, nel secondo invece converge.
Quindi il criterio è inefficace. ▨

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$ $\forall n$.

Supponiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Allora

i) Se $0 \le l < 1$ la serie converge

ii) Se $l > 1$ la serie diverge

iii) Se $l = 1$ il criterio è inefficace.

Dim.

(i) Sia l' t.c. $l < l' < 1$.

poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$\forall\ n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le l'$$

cioè

$$a_{n+1} \le l' a_n$$

Iterando, si ottiene

$$a_{n+1} \le (l')^{n+1-\bar{n}} a_{\bar{n}} = (l')^{n+1} \frac{a_{\bar{n}}}{(l')^{\bar{n}}}$$

Applicando il criterio del confronto generalizzato a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \frac{a_{\bar{n}}}{(l')^{\bar{n}}} \sum_{n=0}^{\infty} (l')^n$$

poiché $\alpha l' < 1$ si ottiene la tesi.

ii) Se $l > 1$, allora $\exists\ \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

cioè

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Iterando, si ha che $\forall\ n \geq \bar{n}$, si ha

$$a_{n+1} \geq a_{\bar{n}} > 0.$$

Quindi non è soddisfatto il test di Cauchy. Quindi la serie non è convergente, e poiché ha termini positivi, è divergente.

iii) Di nuovo, consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergente} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ convergente.}$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$