Di nuovo, ciò dimostra che il criterio in questo caso ($l=1$) è inefficace. ▨

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n \geq 0 \ \forall n$,

$a_{n+1} \leq a_n \ \forall n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

N.B. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ si dice "condensata".

Dim.

Poniamo

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n \qquad \sigma_k := \sum_{n=0}^{k} 2^n a_{2^n}$$

Osserviamo che:

$a_1 \leq a_1$

$a_2 + a_3 \leq 2a_2$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4$

$\dots\dots$

Sommando membro a membro le disuguaglianze, si ha $\boxed{s_{2^k-1} \leq \sigma_{k-1}}$ (1)

D'altra parte, si ha

$a_1 \geq \frac{1}{2} a_1$

$a_2 \geq \frac{1}{2} 2a_2$

$a_3 + a_4 \geq 2a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4a_4$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8 = \frac{1}{2} 8a^8$

. . . .

Sommando termine a termine le disuguaglianze, si ottiene

$$\boxed{s_{2^k} \geq \frac{1}{2} \sigma_k} \qquad (2)$$

Da (2) si vede che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $(s_k)_k$ è limitata e quindi anche $(\sigma_k)_k$ è limitata e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ è convergente.

Da (1) si vede che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente, allora $(s_k)_k$ tende a $+\infty$, e quindi anche $(\sigma_k)_k$ tende a $+\infty$, e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ è divergente.

∎

SERIE ARMONICHE

Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $0 < \alpha$.

Utilizziamo il criterio di condensazione.

La condensata è

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$$

se $\alpha \leq 1$ la serie diverge

se $\alpha > 1$ la serie diverge.

SERIE A SEGNI ALTERNI

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri positivi. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

si dice serie a segni alterni.

CRITERIO DI LEIBNITZ

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n > 0$ $\forall n$, $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Dimostrazione

Poniamo $s_k := \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$

Si ha:

·) $s_{2(k+1)} = s_{2k} \underbrace{- a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{\leq 0} \leq s_{2k}$

$\Rightarrow (s_{2k})_k$ è decrescente

·) $s_{2(k+1)+1} = s_{2k+1} + \underbrace{a_{2k+2} - a_{2k+3}}_{\geq 0} \geq s_{2k+1}$

$\Rightarrow (s_{2k+1})_k$ è crescente

·) $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0$

$\Rightarrow (s_{2k+1})_k$ è limitata superiormente

·) $s_{2k} = s_{2(k-1)+1} + a_{2k} \geq s_{2(k-1)+1} \geq s_1$

$\Rightarrow (s_{2k})_k$ è limitata inferiormente.

Allora $\exists \; s_p = \lim_{k \to \infty} s_{2k}$

$\exists \; s_d = \lim_{k \to \infty} s_{2k+1}$

Inoltre $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 0$

e quindi $s_p = s_d = s$. ▨

CONSEGUENZA

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (ma non è assol. conv.).

SERIE DI POTENZE

Le serie di potenze sono serie che dipendono da un parametro x.

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali, sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Può essere vista come un "polinomio di grado infinito".

Data una serie di potenze, la prima cosa da fare è determinare per quali valori di x la serie converge.

TEOREMA

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

se $\exists \lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = L \in [0,+\infty]$

allora la serie converge assolutamente se $|x| < R$ e non converge se $|x| > R$, dove $R = \frac{1}{L} \in [0,+\infty]$.

R è detto "raggio di convergenza".

Dim.

Se $|x| < R = \frac{1}{L}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |x| = L|x| < 1$$

quindi per il criterio della radice la serie è assolutamente convergente.

Se $|x| > R = \frac{1}{L}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |x| = L|x| > 1$$

Quindi per il criterio della radice la serie non converge. ▨

SERIE DI TAYLOR

Sia $f:]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte, ovvero $f \in C^\infty$. Allora $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si può scrivere il polinomio di Taylor di ordine n

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j + R_n(x)$$

dove $\frac{R_n(x)}{|x-x_0|^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Vale la formula del resto alla Lagrange

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{x,n})(x-x_0)^{n+1}, \quad |\xi_{x,n} - x_0| < |x - x_0|$$

È quindi naturale definire la "serie di Taylor"

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j$$

Si tratta di una serie di potenze, che quindi ha il suo raggio di convergenza $R \geq 0$.

Se $R > 0$, tale serie definisce una funzione $Sf(x)$ su $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Ci domandiamo se e in quali casi

Sf coincide con f su qualche intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Se ciò accade, si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0, ovvero che è analitica in x_0.

Se una funzione è analitica in ogni punto del suo dominio, allora si dice analitica su tale dominio.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Anche se il raggio di convergenza della serie di Taylor è >0 non è detto che f sia sviluppabile.

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si ha che $f(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0$.

Si può anche verificare che $f \in C^{\infty}$ e $f^{(j)}(0) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$.

La serie di Taylor quindi è la serie nulla, che converge ovviamente $\forall\, x$, ma non coincide con la f.

CONVERGENZA DELLA SERIE DI TAYLOR A f

La convergenza della serie di Taylor a f nel punto x equivale alla condizione

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Analizzeremo ora alcuni casi importanti in cui ciò avviene.

La funzione esponenziale

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_{x,n}} x^{n+1}, \quad \text{con } |\xi_{x,n}| < |x|$$

Si ha quindi

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

osserviamo che

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{|x|}{n} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\bar{n}} \cdot \frac{|x|}{\bar{n}-1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{1}$$

$\forall\ n \geq \bar{n}$, dove $\bar{n}$ è t.c. $\bar{n} \geq |x|$

Quindi $\forall\ n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|}{n+1} \cdot \left(\frac{|x|}{\bar{n}-1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{1} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ne consegue che $|R_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Quindi

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Funzioni trigonometriche

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + R_{2n+1}(x)$$

dove $R_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_{x,n})\, x^{2n+2}$

In questo caso, $f^{(2n+2)} = \pm \sin$

quindi

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

e si conclude come per l'esponenziale
Quindi

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

In modo analogo si ha

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

LA FUNZIONE $\frac{1}{1-x}$ e varianti

Lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ di
$f(x) = \frac{1}{1-x}$ è

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j + R_n(x).$$

Senza fare ulteriori conti,
osserviamo che $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ è la

serie geometrica, quindi:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \iff |x| < 1.$$

Abbiamo quindi i seguenti sviluppi in serie di Taylor:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} \qquad |x|<1.$$

Si può dimostrare che

$$-\log(1-x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^j \quad \text{per} \quad |x|<1.$$

Noi coi nostri mezzi riusciremo a ottenere lo sviluppo solo in un intervallo più piccolo.

Infatti $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{x,n})\, x^{n+1}$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{(1-\xi_{x,n})^{n+1}} x^{n+1}$$

con $|\xi_{x,n}| < |x|$

Quindi

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}}$$

Per avere la convergenza a 0 di $R_n(x)$ deve essere

$$\frac{|x|}{1-|x|} \leq 1$$

cioè $|x| \leq 1 - |x|$,

e quindi $|x| \leq \frac{1}{2}$.