ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA II – Serie numeriche e serie di funzioni

Esercizio 1. Studiare il carattere delle seguenti serie, e ove possibile calcolarne la somma.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$ (diverge)
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+3}}$ (somma: 2/75)
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^5}+3}$
(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}$
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi^n}$
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$
(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$
(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{4n^3+3}\right)^n$ (converge)
(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\frac{1}{(n(n+1))} + 3^{-n}\right)$ (somma: 5/2)
(10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{n^4+n^2+3}$ (converge)
(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$
(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$ (converge)
(13) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n^2 \log n}$
(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

Esercizio 2. Dire se le seguenti serie convergono:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-3})$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Esercizio 3. Dire se le seguenti serie convergono:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+9}$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n}^{-1}$;
(6) $\sum_{n=1}^{\infty}[\sin(\sin n)]^n$.

Esercizio 4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Esercizio 5. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di x:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ (diverge per $x \geq 5$, converge assolutamente per $1 < x < 5$, indeterminata per $x \leq 1$).
(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ (converge assolutamente per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, diverge per $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, converge per $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Esercizio 6. Discutere, al variare di x, la convergenza delle seguenti serie:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log x^n$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{n!}$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Esercizio 7. Discutere, al variare di x, la convergenza delle seguenti serie:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{nx}$.