



# Trasmissione sul canale radio

## Segnali a banda stretta

Fulvio Babich (babich@units.it)

DIA – Università di Trieste



# Affievolimento (*fading*)

- Banda del segnale minore della banda di coerenza.
- Affievolimento non selettivo in frequenza.
- Segnale ricevuto:

$$r(t) = \alpha e^{j\phi} u_m(t) + z(t), 0 \leq t \leq T$$

- dove  $\alpha$  e  $\phi$  sono variabili aleatorie, e  $z(t)$  rappresenta il processo di rumore gaussiano.



# Affievolimento: modello di Clarke

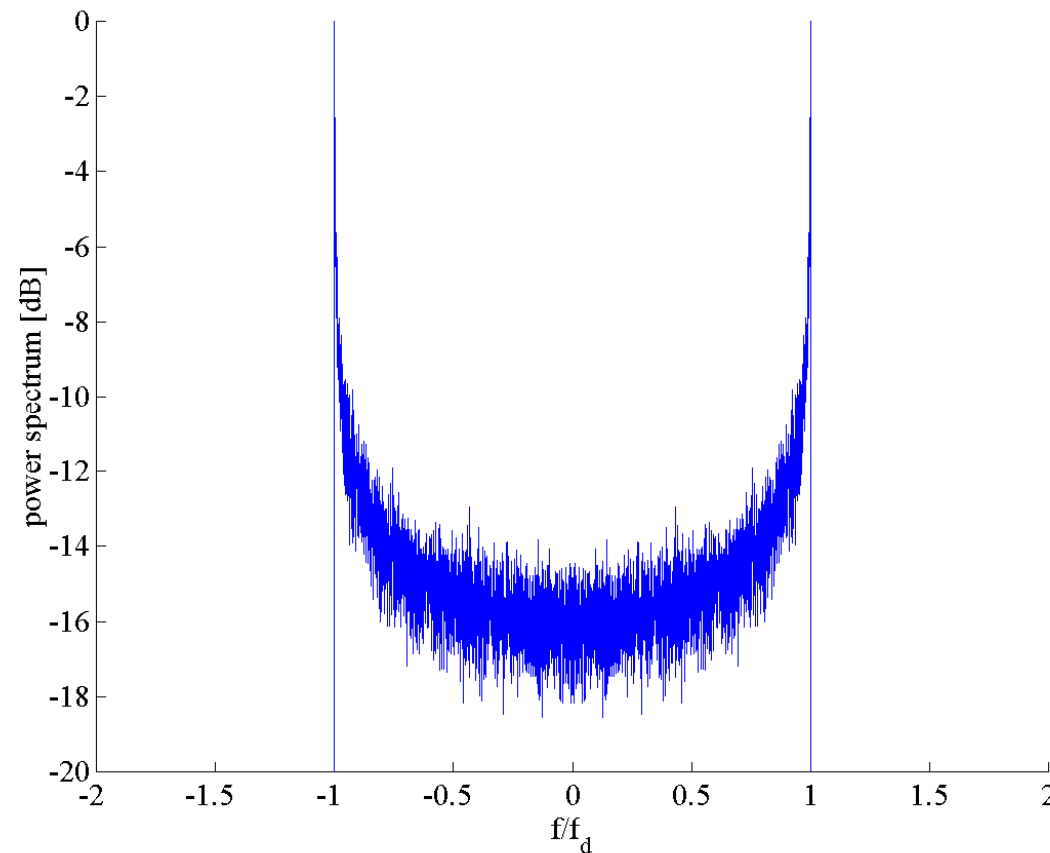
- Ipotesi:
  - Trasmettitore fisso e dotato di un'antenna con polarizzazione verticale.
  - Ricevitore mobile e dotato di un'antenna omnidirezionale sul piano orizzontale.
  - Campo incidente ottenuto come risultante di molte componenti provenienti da tutte le direzioni.
- Modello risultante:
  - Le componenti reale e immaginaria del campo sono variabili aleatorie gaussiane (a media nulla se trasmettitore e ricevitore non sono in visibilità - fading di **Rayleigh**, non nulla in caso contrario - fading di **Rice**), tra loro incorrelate.
  - Il coefficiente di autocorrelazione (autocovarianza normalizzata) di ciascuna delle due componenti è espresso dalla:  $\rho(\tau) = J_0(2\pi f_d \tau)$  ( $J_0$  è la funzione di Bessel di prima specie e di ordine 0, e  $f_d$  è la (massima) frequenza Doppler (banda Doppler)).



# Spettro di potenza delle singole componenti

- Spettro delle componenti (valor medio escluso):

$$S(f) = \frac{1}{2\pi f_d} \frac{1}{\sqrt{1 - (f/f_d)^2}}, \quad 0 \leq |f| \leq f_d$$





# Spettro complessivo (fading di Rayleigh)

- Il **coefficiente di autocorrelazione** (autocovarianza normalizzata) dell'ampiezza e della potenza sono entrambi descrivibili mediante la seguente espressione (per l'ampiezza si tratta di una descrizione approssimata, mentre per la potenza si tratta di un'espressione esatta):

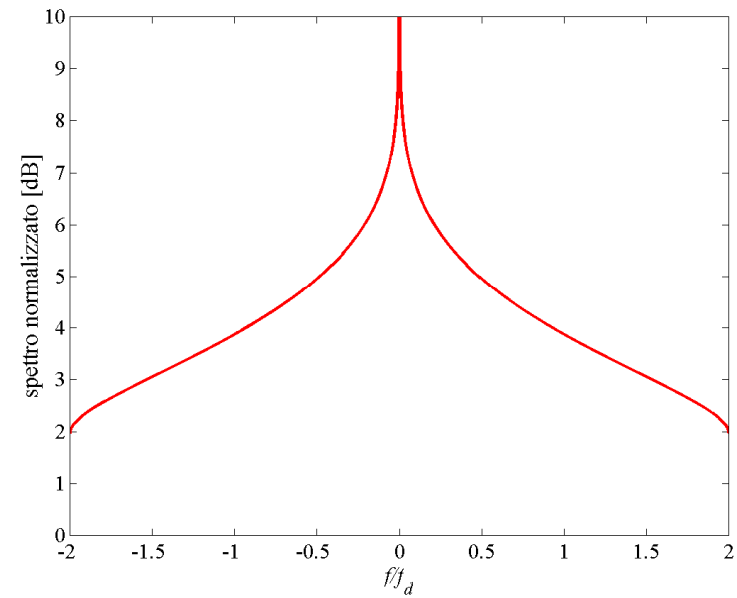
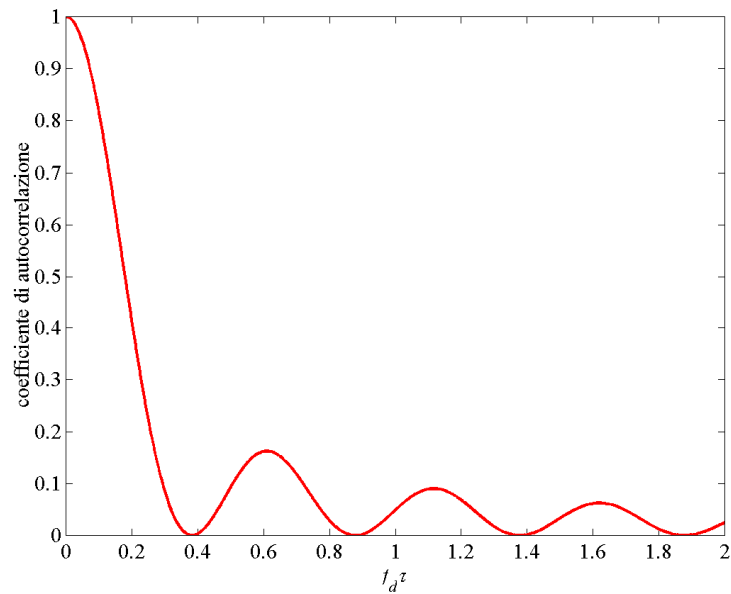
$$\rho(\tau) = J_0^2(2\pi f_d \tau)$$

- Lo **spettro di potenza** è espresso dalla:

$$S(f) = \frac{P}{64\pi} \frac{1}{f_d} \mathbf{K} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{f}{2f_d} \right)^2} \right), \quad 0 \leq |f| \leq 2f_d$$

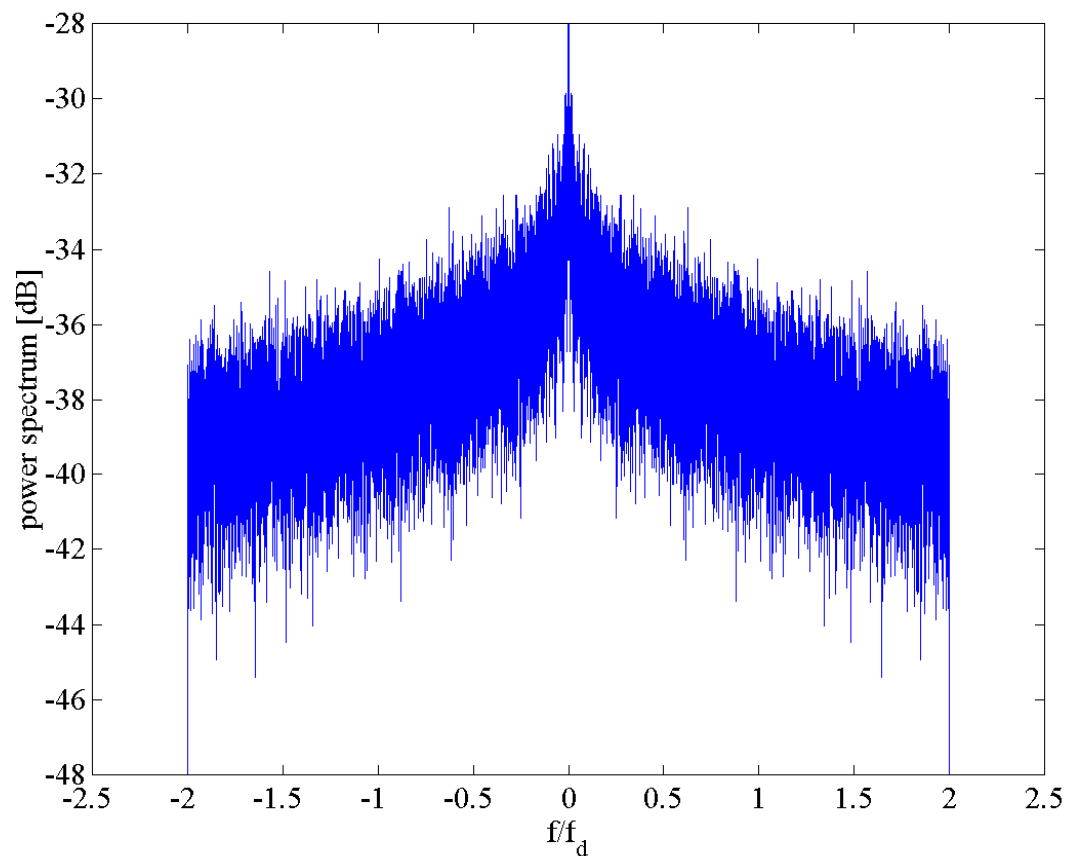
dove  $\mathbf{K}(x)$  è l'integrale ellittico completo del primo tipo.

# Spettro complessivo (fading di Rayleigh) (2)





# Spettro complessivo (Rayleigh) (misura)





## Affievolimento lento - veloce

- Nell'ipotesi di canale non selettivo (banda del segnale minore della banda di coerenza), il segnale subisce un'attenuazione complessa,  $\alpha(t)$ , variabile nel tempo (affievolimento o *fading*).
- Osservando il coefficiente di autocorrelazione, si nota che valori di fading intervallati di  $\tau \ll 0.1/f_d$  sono fortemente correlati, mentre valori intervallati di  $\tau \gg 0.1/f_d$  sono incorrelati.
- Detto  $T$  l'intervallo di tempo di interesse (ad esempio durata di un simbolo o di un pacchetto), il fading si dice lento se  $T \ll 0.1/f_d$  (simboli consecutivi subiscono la medesima attenuazione) e veloce se  $T \gg 0.1/f_d$  (simboli consecutivi subiscono attenuazioni indipendenti).
- Esempio:  $v=100$  km/h,  $f_c = 1.0$  GHz: risulta  $f_d = 93$  Hz;  
Fading lento:  $1/T \gg 930$  simboli/s; Fading veloce:  $1/T \ll 930$  simboli/s.





# Affievolimento: un modello per l'ampiezza

- L'ampiezza del segnale ricevuto,  $\rho$ , segue, in generale, la distribuzione di Rice, la cui funzione di densità di probabilità è data dalla:

$$f_{\rho}(\rho|P, K) = (1 + K)e^{-K} \frac{\rho}{P} e^{-\frac{1+K}{2P}\rho^2} I_0\left(\rho \sqrt{\frac{2K(1+K)}{P}}\right)$$

dove  $K$  è il **fattore di Rice**, (rapporto tra la potenza del cammino diretto e la potenza ricevuta mediante riflessioni),  $P$  è la potenza media ricevuta, e  $I_0$  è la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine 0.



# Affievolimento di Rice

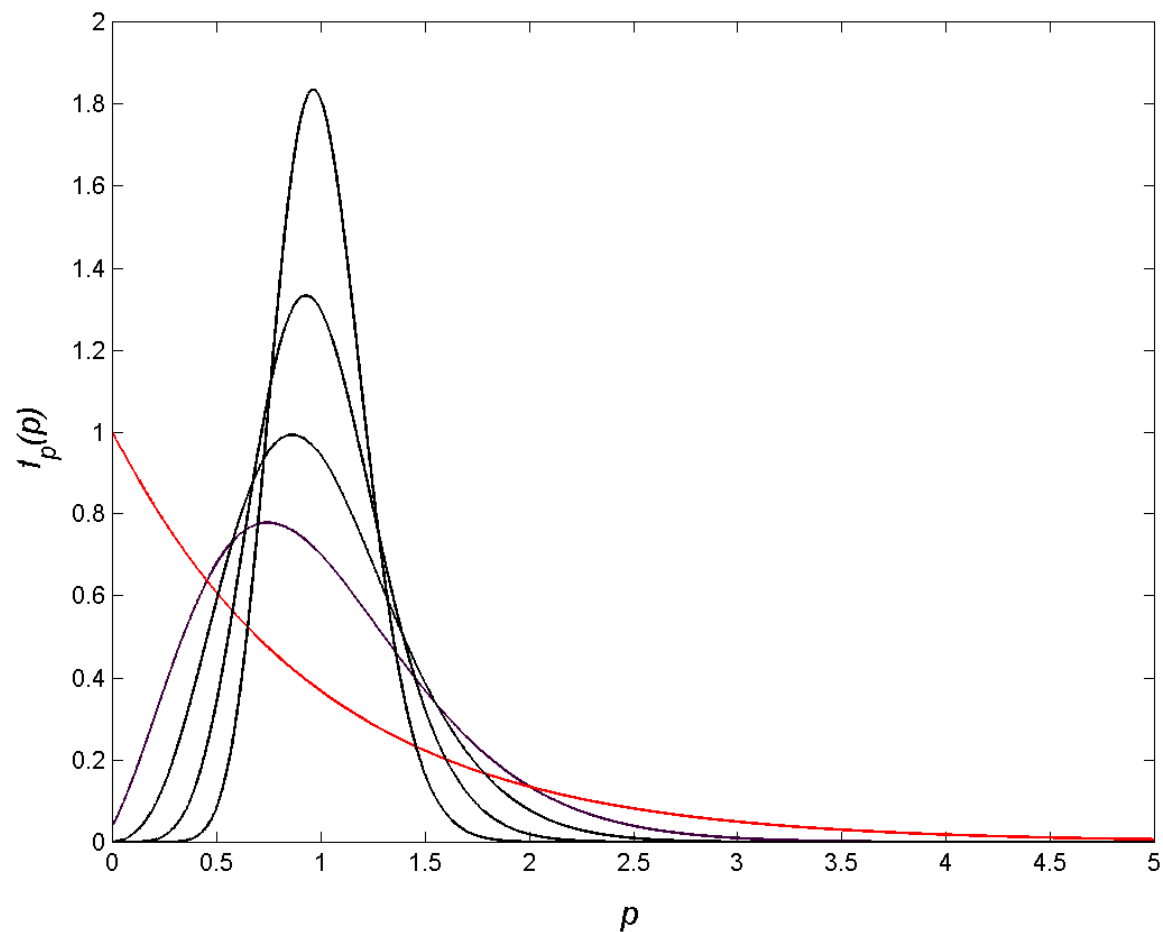
- Analogamente la potenza,  $p=\rho^2/2$ , segue, in generale, la distribuzione  $\chi^2$  non centrale con 2 gradi di libertà, la cui funzione di densità di probabilità è data dalla:

$$f_p(p|P, K) = (1+K) \frac{e^{-K}}{P} e^{-\frac{1+K}{P}p} I_0\left(\sqrt{4K(1+K)\frac{p}{P}}\right) \quad \sigma^2 = P^2 \frac{1+2K}{(K+1)^2}$$

- Per  $K=0$  si ottiene il fading di Rayleigh per il quale è:

$$f_\rho(\rho|P) = \frac{\rho}{P} e^{-\frac{\rho^2}{2P}} \quad f_p(p|P) = \frac{1}{P} e^{-\frac{p}{P}}$$

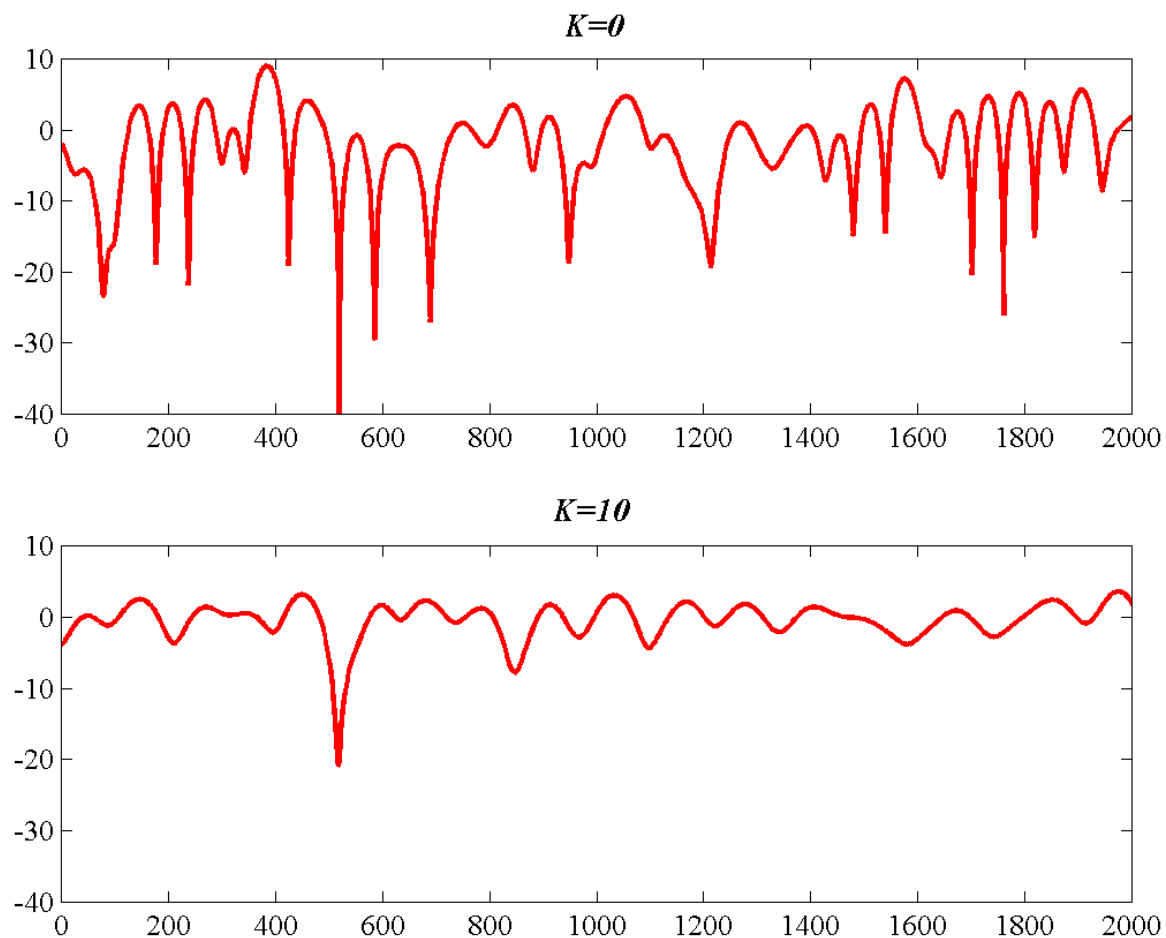
# Affievolimento di Rice



Densità di probabilità di  $p$  per  $P=1$  e  $K=0,5,10,20,40$  .



# Affievolimento: esempi di realizzazioni





# Demodulazione coerente: prestazioni

- **Sfasamento**,  $\phi$ , introdotto dal canale **noto**.
- Demodulazione a filtro adattato o a correlatore.
- Sia  $\gamma_b$  il rapporto S/N istantaneo. Una volta scelta la modulazione la probabilità d'errore è una funzione nota di  $\gamma_b$ .
- La probabilità di errore media si ottiene integrando la probabilità di errore nei confronti della densità di probabilità di  $\gamma_b$ .

$$\bar{P}_e = \int_0^{\infty} P_e(\gamma_b) f_{\gamma_b}(\gamma_b) d\gamma_b$$



## Demodulazione coerente: prestazioni (2)

- Con affievolimento di Rayleigh, la probabilità d'errore è determinabile in forma chiusa, ed è data dalle:

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1 + \bar{\gamma}_b}} \right) \xrightarrow{\bar{\gamma}_b \rightarrow \infty} \frac{1}{4\bar{\gamma}_b} \quad \text{per le modulazioni di tipo antipodale (ASK, PSK)}$$

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{2 + \bar{\gamma}_b}} \right) \xrightarrow{\bar{\gamma}_b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\bar{\gamma}_b} \quad \text{per le modulazioni di tipo ortogonale (FSK)}$$

- La dipendenza del tasso d'errore medio dal rapporto segnale rumore medio non è di tipo esponenziale, per cui il decremento del tasso d'errore all'aumentare del rapporto S\N è molto più lento.



# Demodulazione non coerente: prestazioni

- Anche in questo caso, con affievolimento di Rayleigh, la probabilità d'errore è determinabile in forma chiusa, ed è data dalle:

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2(1 + \bar{\gamma}_b)} \xrightarrow{\bar{\gamma}_b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\bar{\gamma}_b}$$

**DPSK** (asintoticamente coincidente con FSK coerente)

$$\bar{P}_e = \frac{1}{(2 + \bar{\gamma}_b)} \xrightarrow{\bar{\gamma}_b \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{\gamma}_b}$$

**FSK** con demodulazione a involuppo

- Si noti che la stima della fase non è necessaria. Tale stima non è necessaria neanche qualora si consideri la DPSK bastando, in tale caso, che la fase sia stabile in un doppio periodo di simbolo.



# Diversità

- Disponibilità di  $L$  canali (*branches*) **indipendenti**.
  - Di **spazio**: antenne (in ricezione) opportunamente spaziate.
  - Di **polarizzazione** ( $L=2$ ).
  - Di **direzione** (angolo): utilizzo di antenne direttive.
  - Di **frequenza**: trasmissione su bande separate da un  $\Delta f$  maggiore della banda di coerenza.
  - Di **tempo**: trasmissione in intervalli di tempo separati da un  $\Delta t$  maggiore del tempo di coerenza.





# Diversità (considerazioni)

- Confronto fra le tecniche.
  - Le diversità di spazio, di polarizzazione, di direzione richiedono sistemi d'antenna più complessi;
  - la diversità di frequenza richiede una banda maggiore;
  - la diversità di tempo, che implica un utilizzo meno efficiente del tempo (e quindi della banda), non si può utilizzare in sistemi a bassa mobilità.
- Modalità di utilizzo.
  - **Selezione**: viene utilizzato il canale con il rapporto S/N più elevato o, più semplicemente, con la maggior potenza ricevuta;
  - MRC (*Maximal Ratio Combining*): i segnali vengono rivasati, e combinati linearmente (coefficienti proporzionali ai rispettivi S/N).
  - ECG (*Equal Gain Combining*) i segnali vengono rivasati e sommati.



# Diversità: prestazioni *selection diversity*

- $\Gamma$ : rapporto S/N medio sul generico canale. Fading di Rayleigh.  
La funzione di distribuzione del rapporto S/N sul singolo canale è:

$$F_{\gamma_i}(\gamma_i) = \Pr[\gamma_i \leq \gamma] = 1 - \exp(-\gamma/\Gamma)$$

- **Funzione di distribuzione** del rapporto S/N sul **canale selezionato**:

$$F_{\gamma_s}(\gamma_s) = \Pr[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_L \leq \gamma_s] = (1 - \exp(-\gamma_s/\Gamma))^L$$

- **Densità di probabilità** del rapporto S/N sul **canale selezionato**:

$$f_{\gamma_s}(\gamma_s) = \frac{dF_{\gamma_s}}{d\gamma_s} = \frac{L}{\Gamma} (1 - \exp(-\gamma_s/\Gamma))^{L-1} \exp(-\gamma_s/\Gamma)$$

- **Rapporto segnale/rumore medio risultante**:

$$E[\gamma_s] = \Gamma \sum_{l=1}^L \frac{1}{k}$$



# Diversità: prestazioni *maximal ratio combining*

- Sia  $L=2$ . Supponiamo di trasmettere il simbolo  $x_i = \pm\sqrt{E_s}$ . Siano  $h_{11}=\alpha_1\exp(j\varphi_1)$  e  $h_{12}=\alpha_2\exp(j\varphi_2)$  le risposte (complesse) dei due canali indipendenti. Indicato con  $z_1$  e  $z_2$  il rumore presente sui canali con varianza  $N_0/2$ , i segnali ricevuti sono:

$$r_1 = x_i h_{11} + z_1,$$

$$r_2 = x_i h_{12} + z_2.$$

- MRC: costruisco il segnale  $r=r_1 h_{11}^* + r_2 h_{12}^* = x_i(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + z_1 h_{11}^* + z_2 h_{12}^*$  che ha energia pari a  $E_s(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2$  e varianza di rumore pari a  $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) N_0/2$ .

- Pertanto il rapporto segnale/rumore risultante,  $\gamma_t$ , è dato da:

$$\gamma_t = \frac{E_s (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2}{(N_0/2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} = \frac{E_s}{(N_0/2)} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \gamma_1 + \gamma_2.$$

- In generale, in presenza di  $L$  repliche indipendenti:  $\gamma_t = \sum_{l=1}^L \gamma_l$



# Diversità: prestazioni *maximal ratio combining*

- Funzione generatrice dei momenti (definizioni e proprietà):

$$\Phi_1(s) = E[\exp(s\gamma)] = \int f_\gamma(\gamma) \exp(s\gamma) d\gamma$$

$$E[\gamma^n] = \left. \frac{d^n \Phi_1(s)}{ds^n} \right|_{s=0}$$

- Fading di Rayleigh:  $\Phi_1(s) = \frac{1}{1 - s\Gamma}$
- MRC:  $\Phi_L(s) = (\Phi_1(s))^L$
- Fading di Rayleigh:  $f_L(\gamma, \Gamma) = \frac{1}{(L-1)!} \left(\frac{\gamma}{\Gamma}\right)^{L-1} \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma}\right) \quad E[\gamma] = L\Gamma$

$$F_L(\gamma, L) = 1 - \left( \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(\gamma/\Gamma)^k}{k!} \right) \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma}\right)$$



# Prestazioni asintotiche MRC

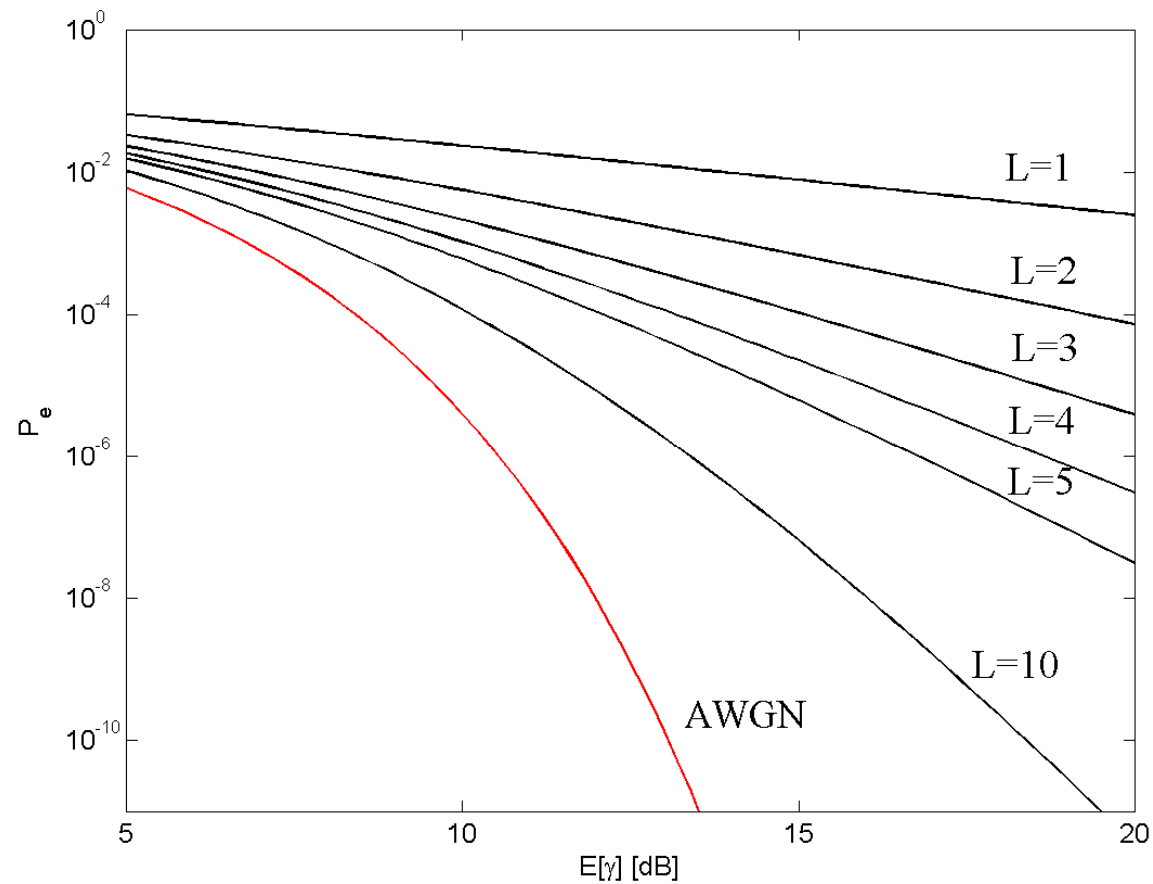
- Fading di Rayleigh. La probabilità di errore media, è, in molti casi di interesse, espressa dalla relazione:

$$P_e = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^k$$

Modulazione	Parametro $\mu$	Prestazione Asintotica
Antipodale coerente	$\mu = \sqrt{\frac{E[\gamma]}{1+E[\gamma]}}$	$P_e = \left(\frac{1}{4E[\gamma]}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
Ortagonale coerente	$\mu = \sqrt{\frac{E[\gamma]}{2+E[\gamma]}}$	$P_e = \left(\frac{1}{2E[\gamma]}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
DPSK	$\mu = \frac{E[\gamma]}{1+E[\gamma]}$	$P_e = \left(\frac{1}{2E[\gamma]}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
FSK a inviluppo	$\mu = \frac{E[\gamma]}{2+E[\gamma]}$	$P_e = \left(\frac{1}{E[\gamma]}\right)^L \binom{2L-1}{L}$

# Prestazioni BPSK

- Ipotesi:  $E[\gamma]=\Gamma$  (indipendente da  $L$ ). Ogni percorso indipendente utilizza una frazione  $L$ -ma della potenza.





# Affievolimento di Nakagami

- Per la **potenza**, si usa la densità di probabilità gamma.

$$f_p(p|P, m) = \left(\frac{m}{P}\right)^m \frac{p^{(m-1)}}{\text{Gamma}(m)} \exp\left(-\frac{mp}{P}\right) \quad \Phi_p(s|P, m) = \left(1 - \frac{sP}{m}\right)^{-m}$$

per valori interi di  $m$ ,  $\text{Gamma}(m) = (m-1)!$

$$\sigma^2 = \frac{P^2}{m}$$

- È possibile passare, con approssimazione accettabile, dalla descrizione di Rice a quella di Nakagami (e viceversa) con le sostituzioni:

$$m = \frac{(K+1)^2}{(2K+1)}; \quad K = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m - \sqrt{m^2 - m}}, \quad m > 1$$

- Per la DPSK, la probabilità di errore media è data da:

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2(1 + \Gamma/m)^m}$$