Catene di Markov

- Utile modello di molti processi di interesse per il settore delle telecomunicazioni.
  - Processo d'errore.
  - Affievolimento introdotto dal canale.
  - Evoluzione temporale sistemi a coda (reti).
- Consolidata trattazione teorica.
- Disponibili tecniche per approssimare un generico processo aleatorio mediante una catena di Markov.

Catene di Markov

- Si consideri una sequenza si variabili aleatorie $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ che assumono i loro valori in un insieme discreto S_X.
- Una catena di Markov tempo discreto $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ è una sequenza aleatoria tale che, date $X_0, X_1, \ldots, X_n$, il valore della v.a. successiva X_{n+1} dipende dal valore di X_n ma non dai valori di X_i, $i<n$.
- La dipendenza è espressa mediante la probabilità di transizione:

$$\mathrm{P}\left[X_{n+1}=j \middle| X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_0=i_0\right]=\mathrm{P}\left[X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right]=P_{i,j}$$

Probabilità di transizione

- Valgono le: $P_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} = 1.$
- Se l'insieme S_X ha dimensione finita, si parla di catena di Markov finita. Supponiamo che sia $S_X = \{0,1,\ldots,K\}$.
- In questo caso, le probabilità di transizione sono espresse in notazione matriciale (matrice di transizione).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0K} \\ P_{10} & P_{11} & & P_{1K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{K0} & P_{K1} & \cdots & P_{KK} \end{bmatrix}$$

Proprietà matrice di transizione

- Le probabilità P_{ij} soddisfano le condizioni:

$$P_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{K} P_{i,j} = 1, \ \forall i.$$

- Teorema di Chapman-Kolmogorov. Definita la probabilità di transizione in n passi, $P^{(n)}{}_{i,j}=P[X(n+m)=j|P(x(n)=i]$ si ha:

$$P_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{K} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)}, \ \forall i, j.$$

- Ne consegue che la matrice di transizione in n passi è data da:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}.$$

Vettore probabilità di stato

- Un vettore riga **p**=[p_0, p_1, …, p_K], dicesi v.p. di stato se valgono le:

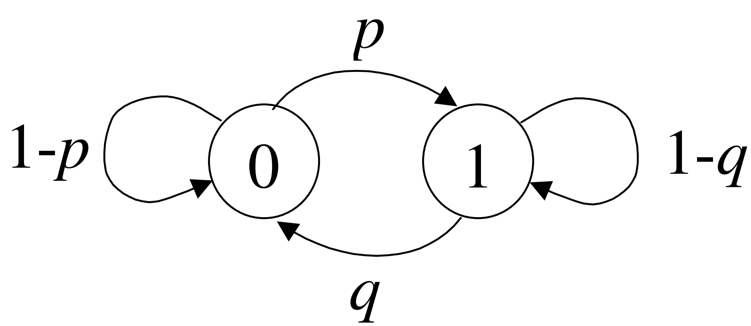
$$p \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{K} p_i = 1, \ \forall i.$$

- Il vettore di stato al passo *n* può essere determinato nei seguenti modi:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P}$$

Esempio

- Consideriamo, per semplicità, una macchina a due stati. La descrizione grafica comunemente adottata è la seguente:



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori di **P** (sol. di det($\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}$)=0) sono $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=1-(p+q)$. Gli autovettori destri di **P**, sol. dell'equazione $\mathbf{s}_i\mathbf{P}= \lambda_i\mathbf{s}_i$ sono $\mathbf{s}_1=[q/(p+q), p/(p+q)]$, $\mathbf{s}_2=[-1\ 1]$.

Esempio (continua)

- **P** si può diagonalizzare nel seguente modo:

$$\mathbf{P}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & -p/(p+q)\\ 1 & q/(p+q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q/(p+q) & p/(p+q)\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

- Risulta essere:

$$\mathbf{P}^n=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^n\mathbf{S}=\frac{1}{p+q}\begin{bmatrix}q & p\\ q & p\end{bmatrix}+\frac{\lambda_2^n}{p+q}\begin{bmatrix}p & -p\\ -q & q\end{bmatrix}$$

- Se il vettore iniziale è $\mathbf{p}(0)=[p_0\ p_1]$ si ha ($\lambda_2=1-(p+q)$):

$$\mathbf{p}(n)=[p_0(n)\quad p_1(n)]=\begin{bmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{bmatrix}+\lambda_2^n\begin{bmatrix}\frac{p_0p-p_1q}{p+q} & \frac{-p_0p+p_1q}{p+q}\end{bmatrix}$$

Probabilità asintotiche di stato

- Le probabilità asintotiche (o limite) di stato, se esistono, sono definite dalla seguente relazione:

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_i(n) = \lim_{n\to\infty} P[X_n = j]$$

- Tali probabilità potrebbero dipendere dallo stato iniziale.
- Nell'esempio precedente distinguiamo tre casi:
  a) $0<p+q<2$. In questo caso $\boldsymbol{\pi}=[q/(p+q)\ \ p/(p+q)]$;
  b) $p+q=0$. In questo caso il sistema rimane nello stato iniziale ($\boldsymbol{\pi}=\mathbf{p}(0)$).
  c) $p+q=2$. In questo caso il sistema oscilla tra lo stato 0 e lo stato 1 (non esiste $\boldsymbol{\pi}$).

Catene di Markov: processi di rinnovamento

- Visitazione. Dato un sistema che parte nello stato i, $V_{i,j}$ rappresenta l'evento corrispondente all'ingresso nello stato j.
- Tempo di primo transito. Per stati i, j tali che $P[V_{i,j}]=1$, il tempo di primo transito, $T_{i,j}$, è il numero di passi necessario per passare da i a j.
- Supponiamo $P[V_{i,j}]=1$. Il processo che porta da j a j è un processo di rinnovamento con interarrivo $X_2=T_{j,j}$. Il processo che porta da i a j è un processo di rinnovamento ritardato con $X_1=T_{i,j}$ e *span*=1. Applicando il teorema di Blackwell si ha:

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\text{rinnovo a } n] = \frac{1}{E[T_{jj}]}.$$

Processi di rinnovamento con ricompensa

- Supponiamo di guadagnare un ricompensa R_n=1 ogni volta che il sistema si trova in *j*.

- Dato che ad ogni ingresso in *j* (anche provenendo da *j*) si ha un rinnovamento, applicando la teoria dei processi di rinnovamento con ricompensa otteniamo il seguente risultato sul tempo di permanenza medio in *j*.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{E[R_n]}{E[T_{jj}]}=\frac{1}{E[T_{jj}]}.$$

- Riassumendo: la probabilità asintotica coincide con la frazione di tempo trascorsa nello stato.

Classificazione degli stati

- Due stati, x, y, si dicono comunicanti se nel grafo si può individuare un percorso da x a y e uno da y a x ($x \leftrightarrow y$).

- Una classe comunicante è un in insieme di stati C, tale che se $i \in C$, allora j se e solo se $i \leftrightarrow j$.

- Uno stato i può essere:
  - transiente, se $P[V_{ii}] < 1$;
  - ricorrente positivo se $P[V_{ii}] = 1$ e $E[T_{ii}] < \infty$;
  - ricorrente nullo se se $P[V_{ii}] = 1$ e $E[T_{ii}] = \infty$.

Teoremi

- Uno stato è ricorrente se e solo se (ci si ritorna un numero infinito di volte):

$$E\left[\text{numero visite a } i \middle| X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} = \infty.$$

- In una catena di Markov vi è sempre un insieme di stati ricorrenti.
- Se $i \leftrightarrow j$, e i è ricorrente, allora j lo è.
- In una classe comunicante, tutti gli stati sono dello stesso tipo (transienti, ricorrenti positivi o ricorrenti nulli).

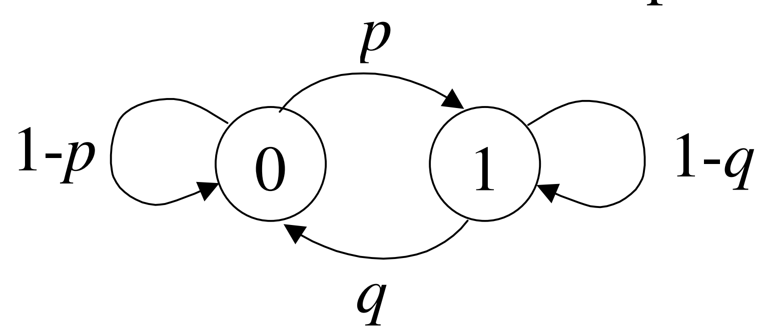
Stati periodici

- Stato periodico: uno stato i si dice periodico di periodo d se d è il più grande intero tale che $P_{ii}^{(n)}=0$, qualora n non sia divisibile per d. Se $d=1$, lo stato si dice aperiodico.

- Teorema. Tutti gli stati di una classe comunicante hanno il medesimo periodo.

Esempio (continuazione)

- Consideriamo nuovamente il solito esempio.



a) $0<p+q<2$. I due stati sono ricorrenti positivi, aperiodici, e appartengono a una classe comunicante.

b) $p+q=0$. I due stati sono ricorrenti positivi, aperiodici, e appartengono a due classi distinte.

c) $p+q=2$. In questo caso gli stati sono ricorrenti positivi, periodici di periodo 2 e appartengono a una classe comunicante.

Teoremi limite

- Generalizzando il teorema di rinnovamento, per due stati comunicanti aperiodici i e j:

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1/E[T_{jj}] & P[V_{jj}]=1 \\ 0 & P[V_{jj}]<1 \end{cases}.$$

Se i due stati sono transienti, la probabilità asintotica di entrare in j è nulla.

- Definizione. Una catena di Markov si dice irriducibile se include una sola classe comunicante.

Teoremi limite (continua)

- In una catena di Markov irriducibile aperiodica vale una delle seguenti condizioni.

a) Gli stati sono tutti o transienti o ricorrenti nulli, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}=0$, e non esiste distribuzione stazionaria.

b) Gli stati sono tutti ricorrenti positivi, e le probabilità limite di stato $\pi_j=\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}>0$ sono l'unica probabilità di massa che soddisfa l'equazione:

$$\boxed{\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}.}$$

Teoremi limite (continua)

- Per una catena di Markov irriducibile aperiodica, con un un numero finito di stati K+1, la matrice di transizione limite è:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_K \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_K \end{bmatrix}.$$

Teoremi limite (continua)

- Per una catena di Markov irriducibile aperiodica, con un un numero finito di stati K+1, il vettore $\boldsymbol{\pi}$ è l'unica soluzione della seguente equazione.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}, \quad \sum_{j=0}^{K} \pi_j = 1.}$$

- Quindi, il vettore $\boldsymbol{\pi}$ è l'autovettore sinistro, corrispondente all'autovalore λ=1, normalizzato in modo da soddisfare i requisiti a cui deve sottostare una FDP legittima.

- Nel solito esempio, nel caso in cui sia $0<p+q<2$ si ha:

$$\boldsymbol{\pi} = [q/(p+q) \qquad p/(p+q)].$$

Teoremi limite (continua)

- Per una catena di Markov irriducibile, ricorrente positiva, periodica, il vettore delle probabilità stazionarie $\boldsymbol{\pi}$ è l'unica soluzione della seguente equazione.

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}, \quad \sum_j \pi_j = 1.$$

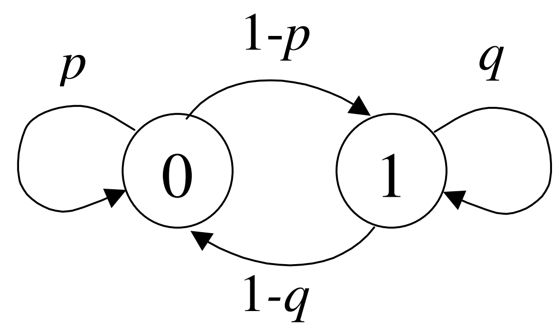
- Per una catena irriducibile di periodo d, sia $R_j(t)$ il tempo speso nello stato j in $[0,t)$. La frazione di tempo spesa è

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \pi_j = \frac{1}{E[T_{jj}]} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{ij}^{(nd)}}{d}$$

Nel solito esempio, con $p=q=1$, è $d=2$, non esiste la probabilità asintotica, è $\mathbf{P}^{nd}=\mathbf{I}$, per cui risulta essere $P_{jj}=1$, $\pi_j=1/2$, $j=1,2$.

Esercizio

- Una sorgente binaria con memoria emette un bit al secondo, secondo il modello di Markov riportato in figura.



- Come nell'esempio precedente, i valori emessi vengono codificati nel seguente modo.

Sequenza	Simbolo
1	0
01	1
001	2
0001	3
...	...
00000001	7
00000000	8

- In una prima fase si adotti la tabella di codifica indicata.

- Nella seconda fase si associ il valore 0 al simbolo 8 e i valori $1b_1b_2b_3$ ai simboli 0÷7, dove $b_1b_2b_3$ rappresenta la codifica binario del simbolo.

Soluzione (1)

- Determiniamo il tasso di emissione dei simboli in uscita, la bit rate dopo la codifica e i valori di p e q per cui la codifica è conveniente.
- Osserviamo che a ciascun transito per lo stato 1 della sorgente corrisponde l'emissione di un simbolo codificato con 4 bit.
- La probabilità dello stato 1 è stata già determinata in precedenza ma può essere semplicemente determinata dalle:

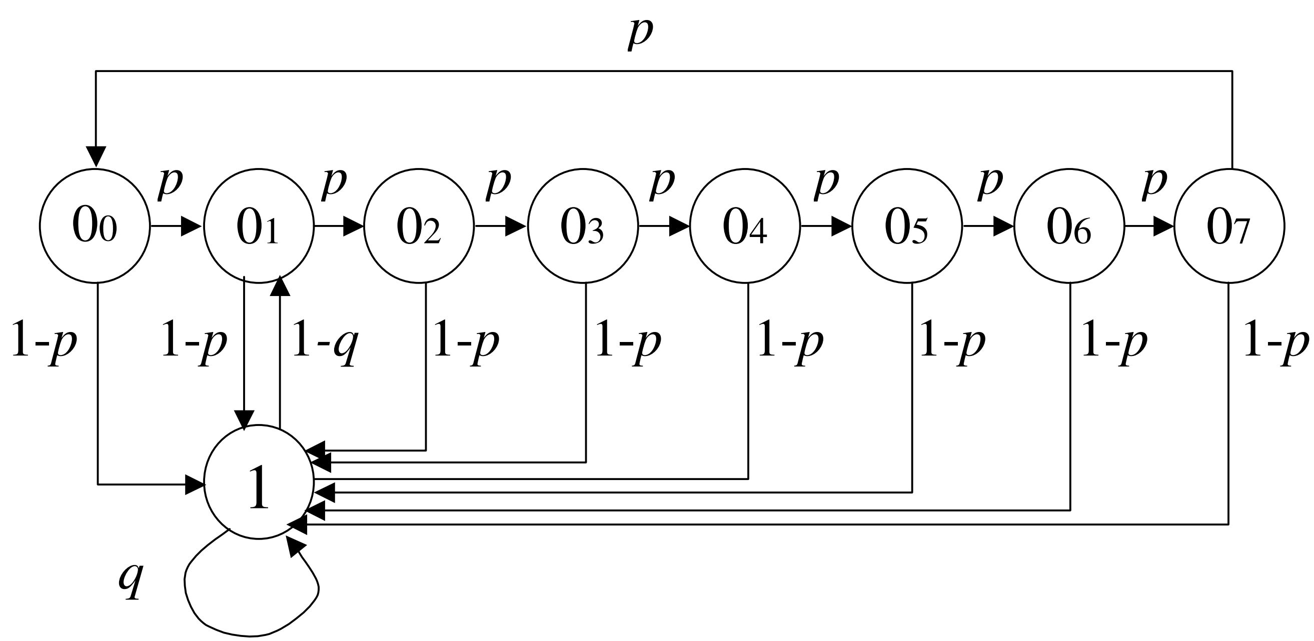
$$[\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1]\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix},$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1.$$

- Si ottiene: $\pi_0 = \dfrac{1-q}{2-p-q}, \quad \pi_1 = \dfrac{1-p}{2-p-q}.$

Soluzione (2)

- Consideriamo il modello dell'operazione di codifica:



- dove lo stato 0*i* è lo stato in cui il codificatore si trova *i* passi dopo aver emesso l'ultimo simbolo (e quando l'ultimo bit era uno 0).

Soluzione (3)

- Si ha $\boldsymbol{\pi} = \lfloor \pi_{0_0} \quad \pi_{0_1} \quad \pi_{0_2} \quad \pi_{0_3} \quad \pi_{0_4} \quad \pi_{0_5} \quad \pi_{0_6} \quad \pi_{0_7} \quad \pi_1 \rfloor,$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

Soluzione (4)

- Si ottengono le:

$$\pi_{0_2} = p\pi_{0_1}$$

$$\pi_{0_3} = p\pi_{0_2} = p^2\pi_{0_1}$$

$$\dots$$

$$\pi_{0_7} = p^6\pi_{0_1}$$

$$\pi_{0_0} = p^7\pi_{0_1}$$

- Sommando:

$$\pi_{0_1}\sum_{i=0}^{7} p^i = \pi_{0_1}\frac{1-p^8}{1-p} = \pi_0 = \frac{1-q}{2-p-q}$$

$$\pi_{0_1} = \frac{(1-q)(1-p)}{(2-p-q)\left(1-p^8\right)} = \pi_1\frac{(1-q)}{\left(1-p^8\right)}$$

Soluzione (5)

- Pertanto il simbolo 8 (codificato con un solo bit), corrispondente allo stato 0_0, viene emesso con tasso:

$$\pi_{0_7} = \pi_1 \frac{(1-q)}{(1-p^8)} p^7$$

- Il tasso di simbolo risulta essere:

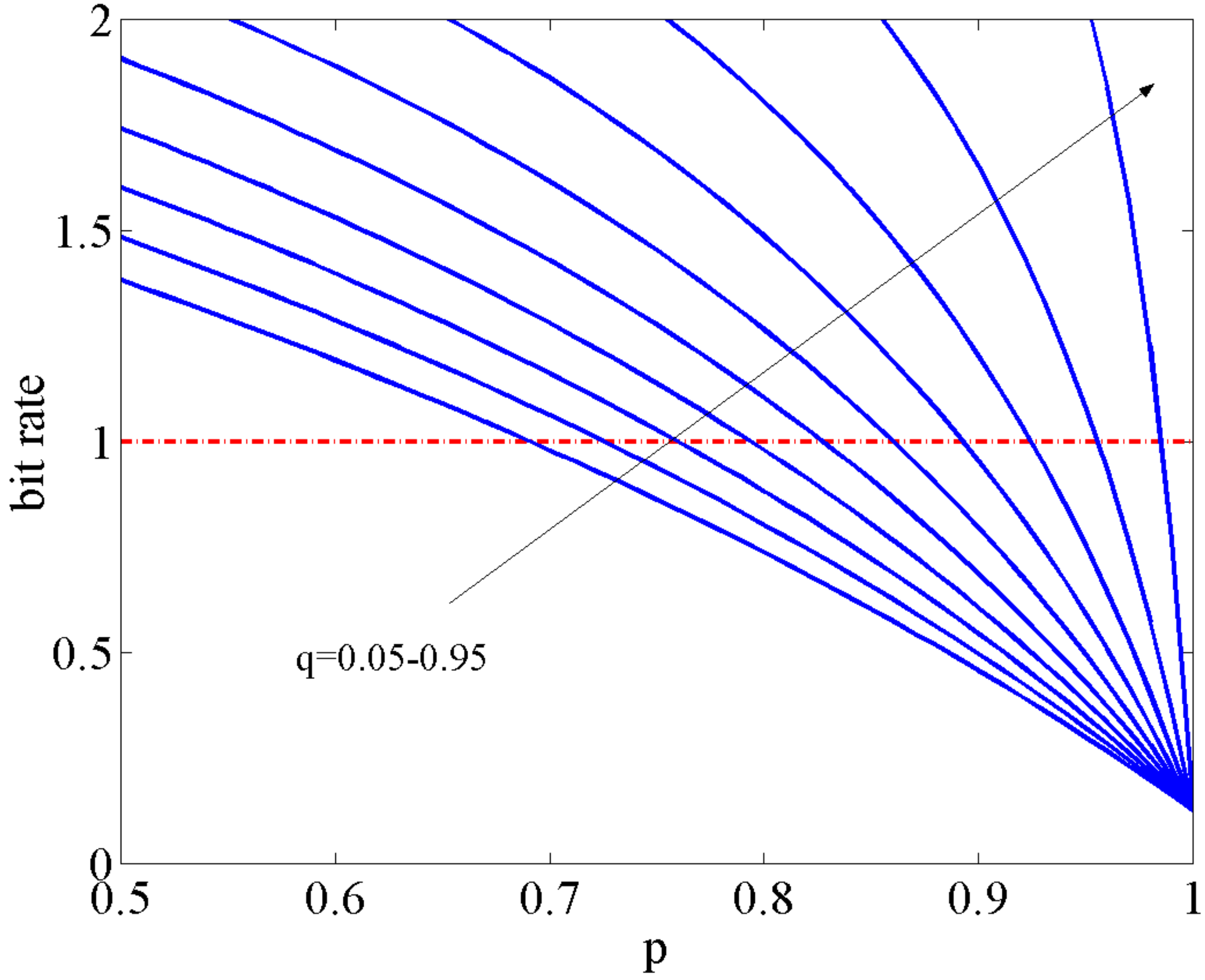
$$R = \pi_1 \left[1 + \frac{(1-q)}{(1-p^8)} p^7 \right] = \frac{1-p}{2-p-q} \left[1 + \frac{(1-q)}{(1-p^8)} p^7 \right] \text{ simboli}/s.$$

- La bit rate in uscita è:

$$\pi_1 \left[4 + \frac{(1-q)}{(1-p^8)} p^7 \right] = \frac{1-p}{2-p-q} \left[4 + \frac{(1-q)}{(1-p^8)} p^7 \right] \text{ bit/s}.$$

La soluzione è conveniente se $q < 1 - 3\dfrac{(1-p)\left(1-p^{8}\right)}{1-p^{7}}$.

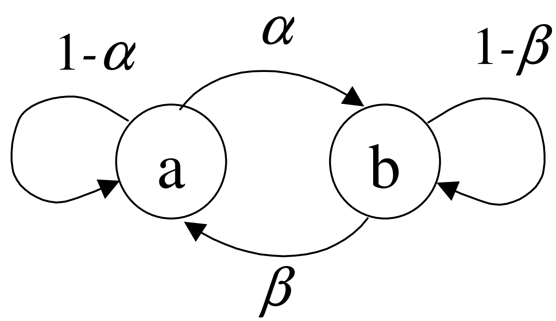
Questa condizione può essere rispettata se $p>0.674$.



Un modello di Markov per l'affievolimento

Fulvio Babich

Modello di Gilbert



- Supponiamo di distinguere fra due condizioni:
  a) $p \leq P_0$: affievolimento.
  b) $p > P_0$: funzionamento normale.
- Gilbert [2] ha ipotizzato che nella condizione a) il sistema operi con un tasso d'errore molto alto e che nella condizione b) il sistema operi senza errori (Elliot [3] ha esteso tale modello, ipotizzando due tassi d'errore diversi nelle due condizioni). Egli ha inoltre ipotizzato che l'evoluzione tra le due condizioni sia descritta da una catena di Markov.
- Detto $F=P/P_0$ il rapporto tra valor medio e soglia (*fade margin*), nell'ipotesi di Clarke, la matrice di transizione è:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix},\ \beta = f_d T \sqrt{\frac{2\pi}{F}},\ \alpha = \beta \frac{\exp(-1/F)}{1-\exp(-1/F)}.$$

Un modello più accurato

- L'accuratezza del modello di Gilbert dipende dai valori di $f_d T$ e F.
- L'accuratezza può essere migliorata nel seguente modo [4]:
  - Si ipotizzi che il valore futuro dello stato dipenda dai k precedenti (modello di Markov di ordine k; per k=1 si ottiene Gilbert):

$$\mathrm{P}\left[X_{n+1} = j \middle| X_n = i, \ldots, X_0 = i_0\right] = \mathrm{P}\left[X_{n+1} = j \middle| X_n = i_n, \ldots, X_{n-k+1} = i_{n-k+1}\right]$$

  - Si associ al modello di ordine k un modello del primo ordine, definendo stato la k-pla [i_n,…, i_{n-k+1}] (si noti che i termini i_j possono assumere i valori 0 – *fade*, 1 – *non fade*).

  - Determinata la nuova matrice di transizione (per via numerica), è possibile determinare il tempo di permanenza in un *fade*, (insieme degli stati in cui i_n =0) nel modo illustrato nel seguito.

Tempi di residenza in un sottoinsieme di stati di una catena di Markov

- Notazione:
  - s_k: stato al passo k.
  - S: insieme di tutti gli stati, $S=\{1, 2,\ldots, K\}$.
  - P_{ij}: $\mathrm{P}[s_k=j|s_{k-1}=i]$.
  - **P**: matrice di transizione.
  - $\boldsymbol{\pi}$: distribuzione limite, che soddisfa la $\boldsymbol{\pi}= \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{P}$.
- Sia $E\subset S$, l'insieme di interesse. Siamo interessati a determinare la distribuzione del tempo di permanenza in E.

$$\zeta(n)=\Pr\,[s_{k+1}\in E, s_{k+2}\in E,\ldots,s_{k+n-1}\in E, s_{k+n}\in E^c|s_k\in E, s_{k-1}\in E^c],$$

dove $E\cap E^c=\emptyset$ e $E\cup E^c=S$.

- Per semplicità definiamo $A_{k,n}= s_{k+1}\in E, s_{k+2}\in E,\ldots, s_{k+n-1}\in E, s_{k+n}\in E^c$.
- Partizioniamo la matrice di transizione e la relativa probabilità limite secondo gli stati di E.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E & E^c \end{array} \\ \mathbf{P}= & \begin{bmatrix} T & U \\ R & Q \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E \\ E^c \end{array}, \qquad \boldsymbol{\pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\pi}_E & \boldsymbol{\pi}_{E^c}\end{bmatrix}$$

- Si ottiene:

$$\begin{aligned}\zeta(n) &= \Pr\left[A_{k,n} \middle| s_k\in E, s_{k-1}\in E^c\right] \\ &= \sum_i \Pr\left[A_{k,n} \middle| s_k\in E, s_{k-1}\in E^c, s_k=i\right]\Pr\left[s_k=i \middle| s_k\in E, s_{k-1}\in E^c\right] \\ &= \sum_{i\in E} \Pr\left[A_{k,n} \middle| s_{k-1}\in E^c, s_k=i\right]\Pr\left[s_k=i \middle| s_k\in E, s_{k-1}\in E^c\right] \\ &= \sum_{i\in E} \Pr\left[A_{k,n} \middle| s_k=i\right]\Pr\left[s_k=i \middle| s_k\in E, s_{k-1}\in E^c\right] = \sum_{i\in E} f_i(n)\nu(i)\end{aligned}$$

Calcolo di $f_i(n)$

- $f_i(n)=\Pr[A_{k,n}|s_i]$ è la probabilità di rimanere esattamente n passi in E partendo da $s_i \in E$. Pertanto

$$f_i(n)=\sum_{j\in E} P_{ij} f_j(n-1).$$

- Sia $\mathbf{f}(n)=[f_1(n), f_2(n), \ldots, f_K(n)]$. Ne risulta: $\mathbf{f}(n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{Tf}(n\text{-}1)^{\mathrm{T}}$.
- Iterando si ottiene: $\mathbf{f}(n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{T}^{n\text{-}1}\mathbf{f}(1)^{\mathrm{T}}$.
- Pertanto (**1** è un vettore colonna composto da "1").

$$f_i(1)=\Pr\left[s_{k+1}\in E^c \middle| s_k = i\right]=\sum_{j\in E^c} P_{i,j}; \qquad f_i(1)^{\mathrm{T}} = \mathbf{U1}.$$

- Concludendo

$$\mathbf{f}(n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U1}.$$

Calcolo di $\nu(i)$

$$\nu(i) = \Pr\left[s_k = i \middle| s_k \in E, s_{k-1} \in E^c\right]$$

$$= \Pr\left[s_k = i, s_k \in E, s_{k-1} \in E^c\right] \Big/ \Pr\left[s_k \in E, s_{k-1} \in E^c\right]$$

$$= \sum_{m \in E^c} h(m,i) \Big/ \sum_{m \in E^c, n \in E} h(m,n)$$

$$h(n,m) \overset{\text{def}}{=} \Pr\left[s_{k-i} = n, s_k = m\right] = \pi_n P_{nm}$$

- Si ottiene:

$$\mathbf{v} = \left[\nu(1), \nu(2), \cdots \nu(|E|)\right] = \frac{\boldsymbol{\pi}_{E^c}\mathbf{R}}{\boldsymbol{\pi}_{E^c}\mathbf{R1}}.$$

Risultato

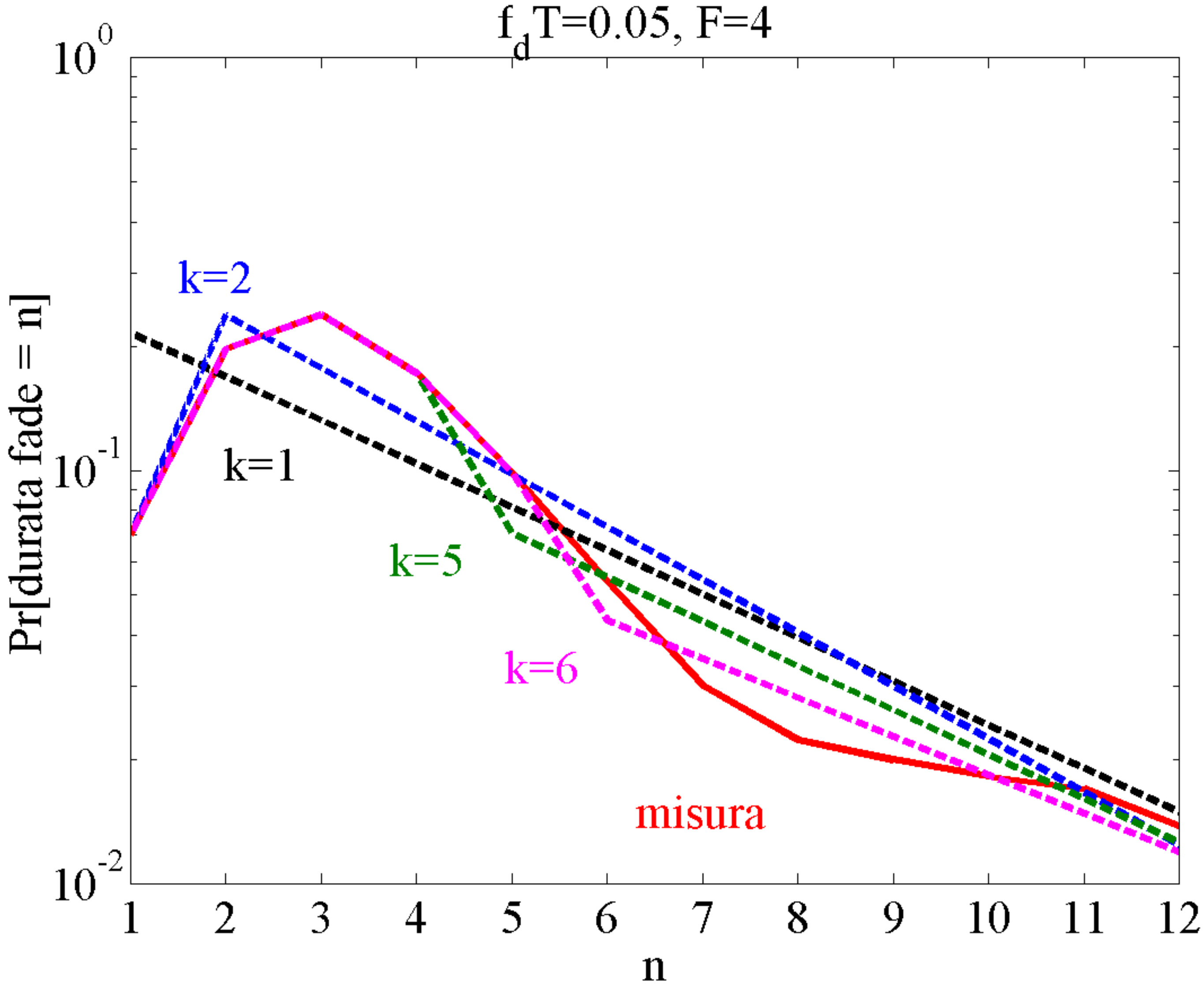
- Pertanto

$$\zeta(n)=\sum_{i\in E} f_i(n)\nu(i)=\mathbf{v}\mathbf{f}(n)^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{\pi}_{E^c}\mathbf{R}\mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}_{E^c}\mathbf{R}\mathbf{1}}$$

- In Matlab, sia **e** il vettore tale che e_i=1 se $i\in E$ e 0 altrimenti. Sia **E=**diag(**e**), e sia **1** la matrice colonna composta da K "1".
  - $\mathbf{E}^{\mathbf{C}}$**=I-E**.
  - $\mathbf{R}_1$**=** $\mathbf{E}^{\mathbf{C}}\mathbf{PE}$.
  - $\mathbf{T}_1$**= EPE**.
  - $\mathbf{U}_1$**=** $\mathbf{EPE}^{\mathbf{C}}$.

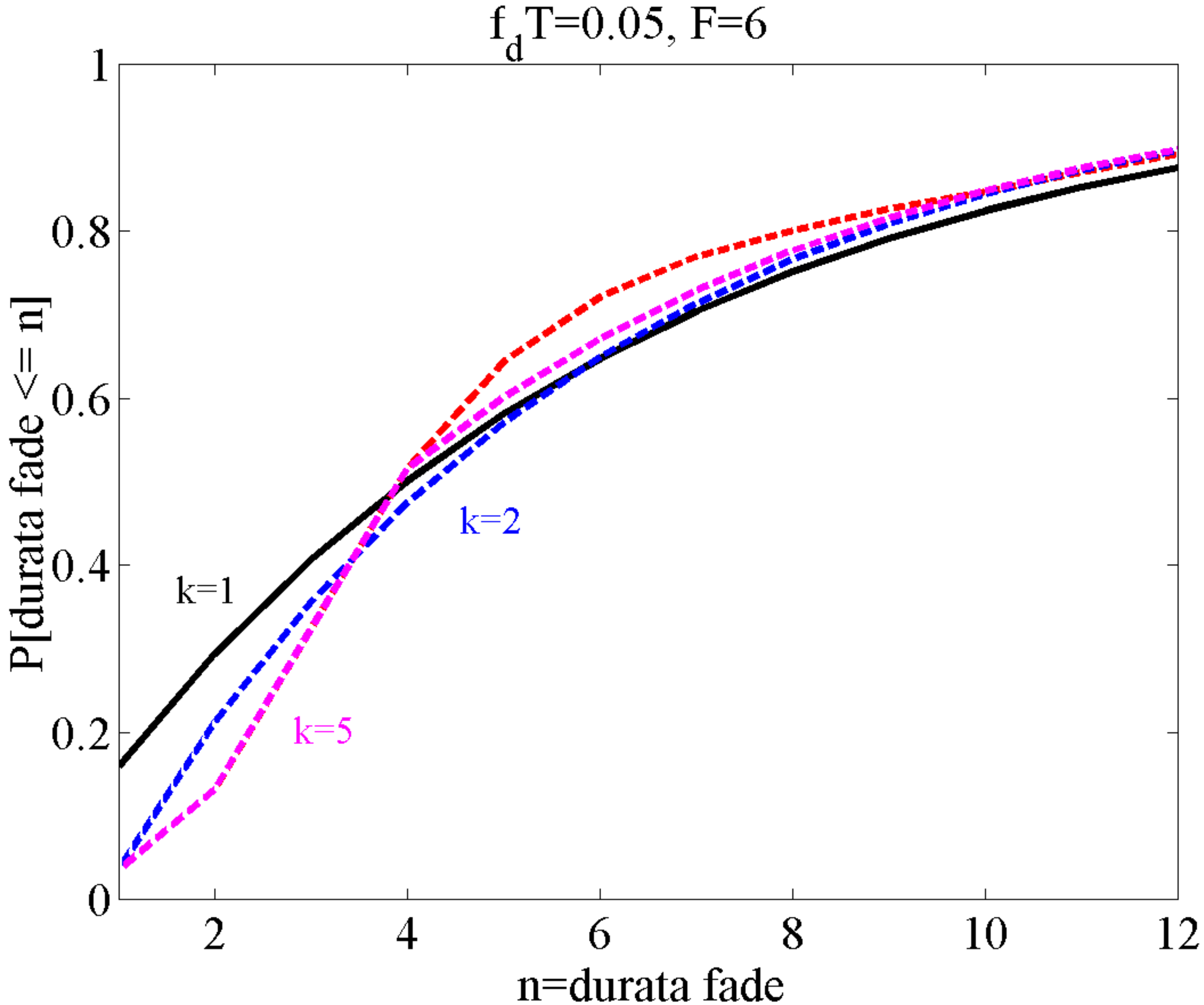
$$\zeta(n)=\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{R}_1\mathbf{T}_1^{\,n-1}\mathbf{U}_1\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}\mathbf{R}_1\mathbf{1}}.$$

Esempio (1)



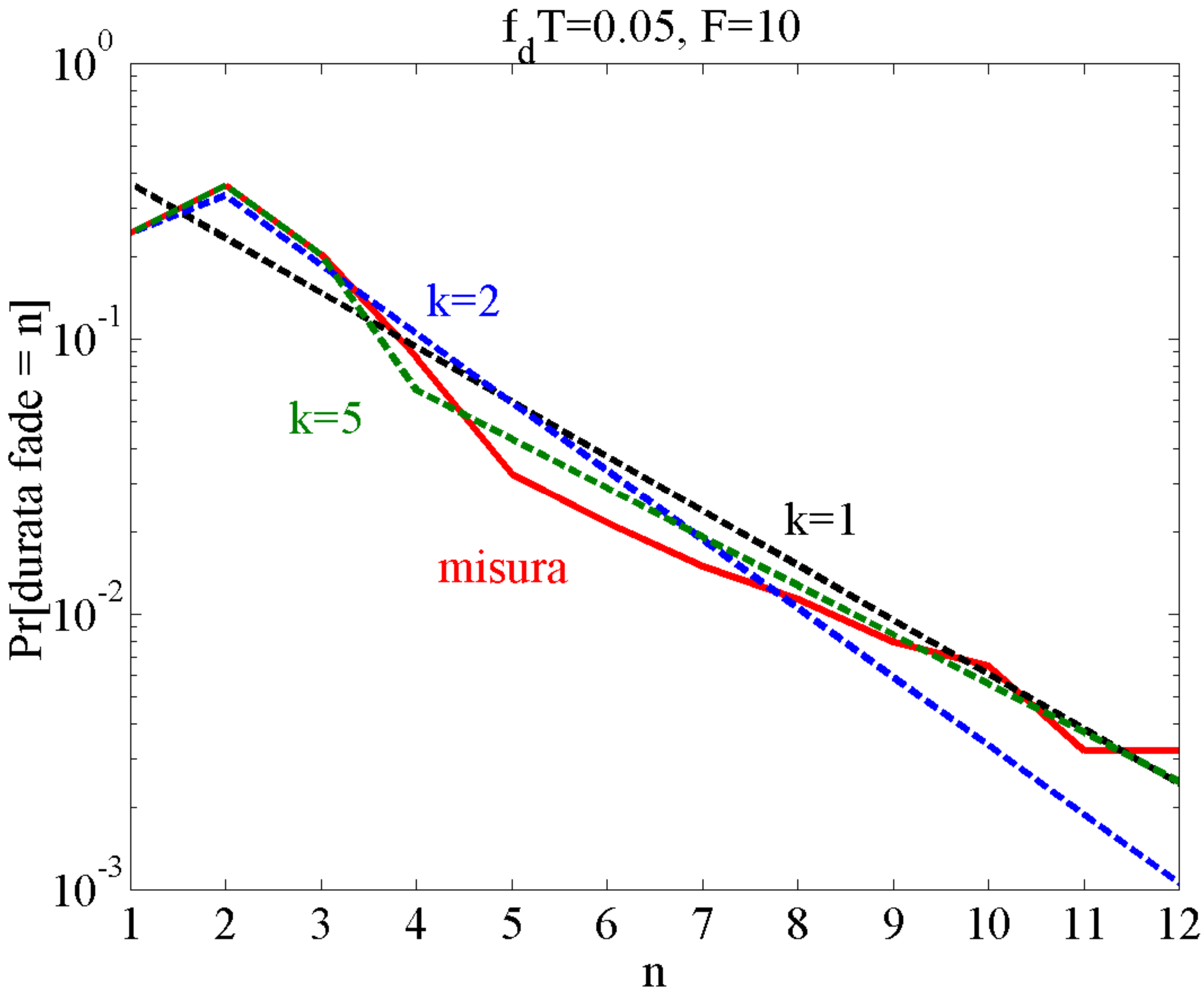
$f_d T$=0.05, F=4
10^0
10^{-1}
10^{-2}
Pr[durata fade = n]
k=2
k=1
k=5
k=6
misura
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
n

Esempio (1b)

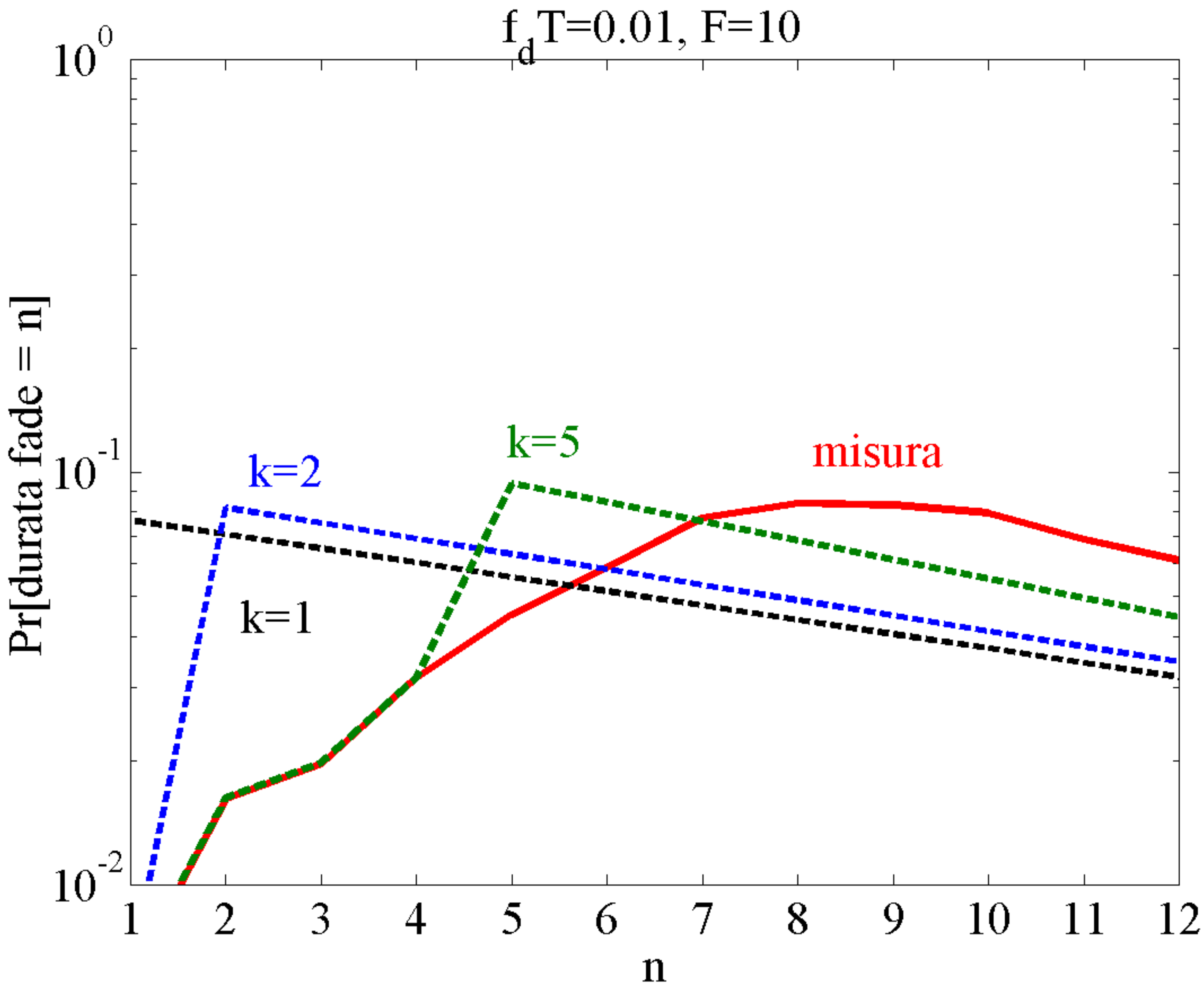


f_dT=0.05, F=6
P[durata fade <= n]
n=durata fade
k=1
k=2
k=5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
12

Esempio (2)


$f_d T$=0.05, F=10
Pr[durata fade = n]
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
n
k=2
k=5
k=1
misura

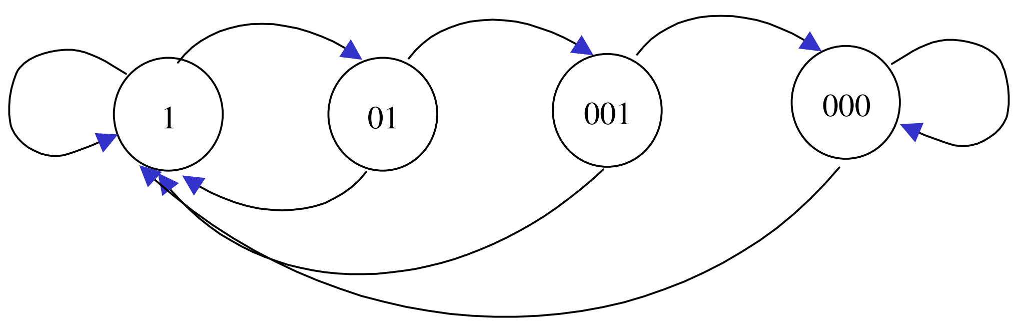
Esempio (3)



f_dT=0.01, F=10
10^0
10^{-1}
10^{-2}
Pr[durata fade = n]
k=2
k=5
misura
k=1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
n

Esempio (3 continua)

- Nell'esempio 3, il modello è costituito da stati del tipo riportato in figura, che si distinguono proprio per il tempo di permanenza in un *fade* (nella figura, 1, 2, almeno 3). All'aumentare di *k* aumenta il numero di stati inclusi (ovviamente, la figura considera il caso *k*=3).



- Negli altri esempi il modello ha una struttura più complessa.

Un modello con L livelli

- Supponiamo di quantizzare rispetto a L-1 soglie A_i, i=1…L-1. Sia (A_o=0, A_L=∞).
- Detta p_k la probabilità che il valore della potenza sia compreso fra A_k e A_{k+1}, le probabilità di transizione sono espresse dalle [5, 6]:

$$
\begin{aligned}
&t_{k,k+1} \approx N_{k+1}T \big/ p_k, && k = 0,\ldots,L-2 \\
&t_{k,k-1} \approx N_k T \big/ p_k, && k = 1,\ldots,L-1 \\
&t_{j,k} \approx 0 && |j-k| \geq 2 \\
&t_{k,k} = 1 - \sum_{j=0,\, j\neq k}^{L-1} t_{k,j} && k = 0,\ldots,L-1
\end{aligned}
$$

Un modello con *L* livelli

- Dove: $N_k = f_D \sqrt{\frac{2\pi(1+K)A_k}{P}} e^{-K} I_0\left(2\sqrt{\frac{K(1+K)A_k}{P}}\right) \exp\left(-\frac{1+K}{P}A_k\right)$
- essendo *P* il valor medio della potenza ricevuta.
- Si noti che per *K*=0 (*fading* di Rayleigh), le equazioni assumono una semplice forma chiusa.
- Anche in questo caso, il modello di Markov può essere esteso a un ordine più elevato [4].

$$L = 2, K = 0, F = P/A;$$

$$p_0 = 1 - \exp(-1/F);$$

$$p_1 = \exp(-1/F);$$

$$N_1 = f_D \sqrt{2\pi/F}\exp(-1/F);$$

$$t_{0,1} = \frac{N_1 T}{p_0} = f_D T \sqrt{2\pi/F}\frac{\exp(-1/F)}{1-\exp(-1/F)} = \alpha$$

$$t_{1,0} = \frac{N_1 T}{p_1} = f_D T \sqrt{2\pi/F} = \beta$$

Coefficiente di autocorrelazione

Sia **s** il vettore riga dei valori quantizzati (cioè degli L valori associati ai diversi livelli di quantizzazione), **p** il vettore delle probabilità e **T** la matrice di transizione; sia inoltre $\{x[n]\}$ il processo quantizzato. Si ha:

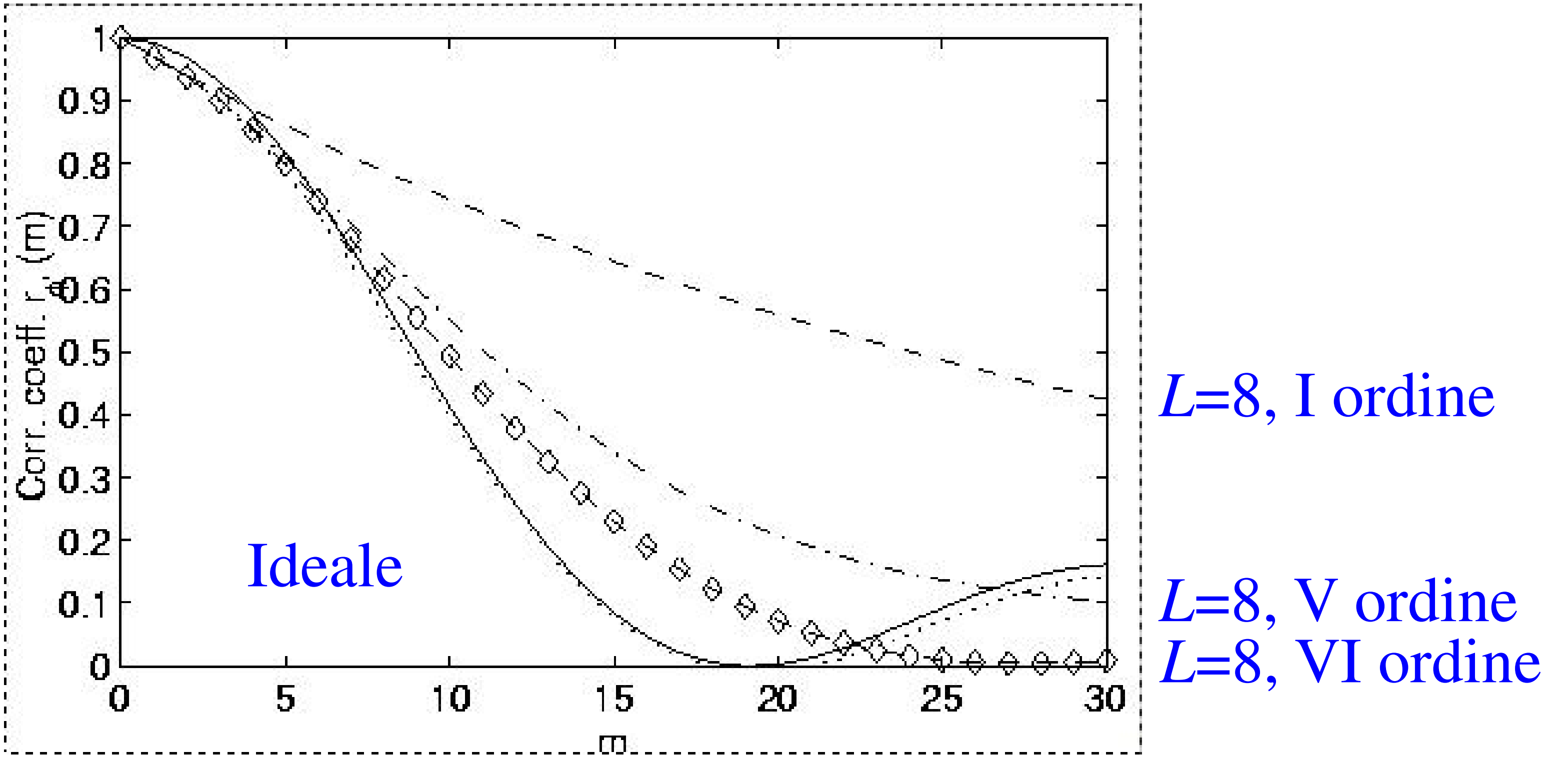
$$E[x_n x_{n+m}] = \sum_i \sum_j s_i p_i s_j p_j = \sum_i s_i p_i \sum_j s_j t_{i,j}^{(m)} = (\mathbf{s} * \mathbf{p})\left[\mathbf{s}\left(\mathbf{T}^m\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$(\text{dove } \mathbf{s} * \mathbf{p} = (s_i p_i)_{i=1}^{L})$$

$$E[x_n] = \mathbf{s}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}$$

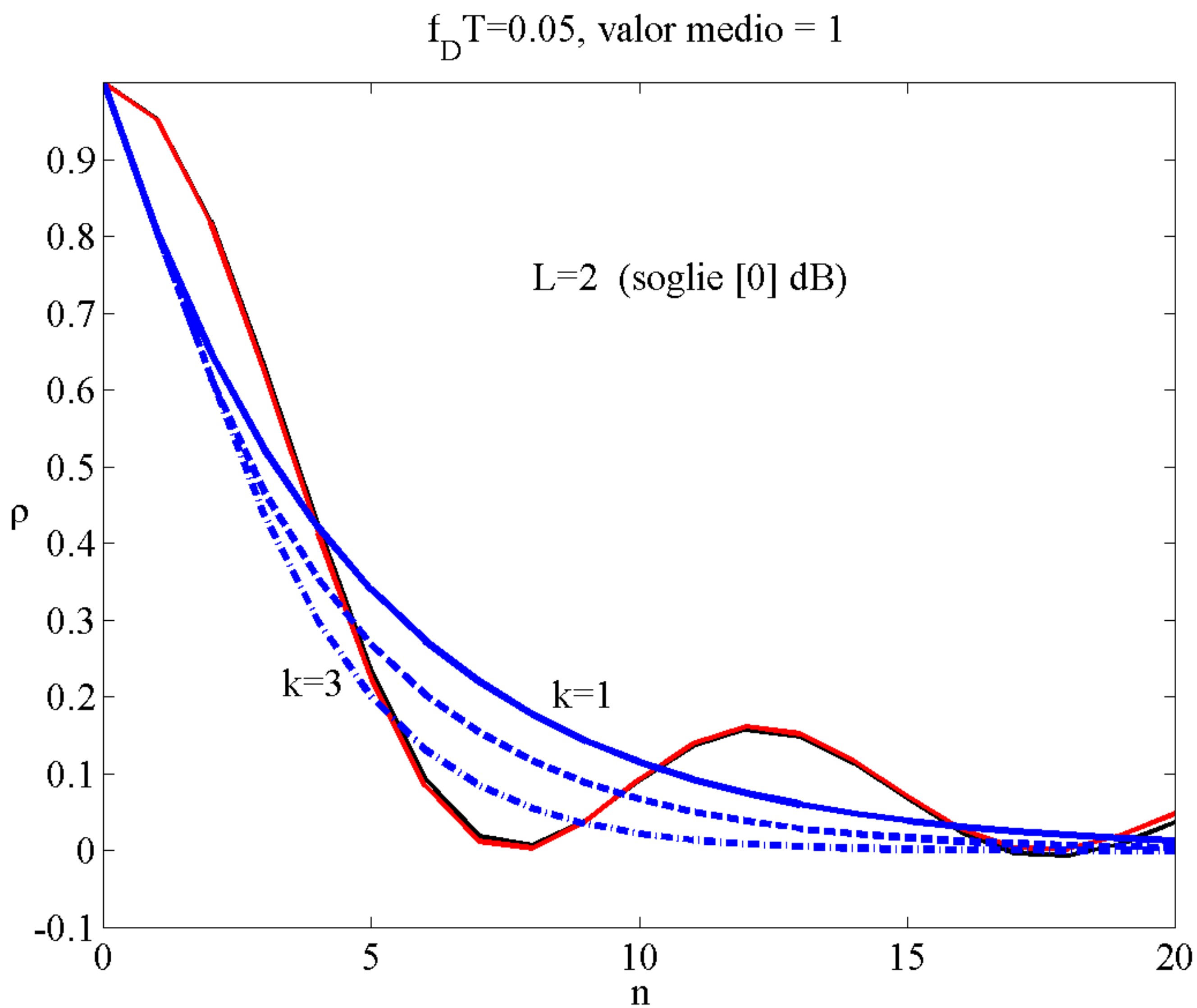
$$\rho_m = \frac{E[x_n x_{n+m}] - (E[x_n])^2}{E\left[x_n^2\right] - (E[x_n])^2}$$

Esempio

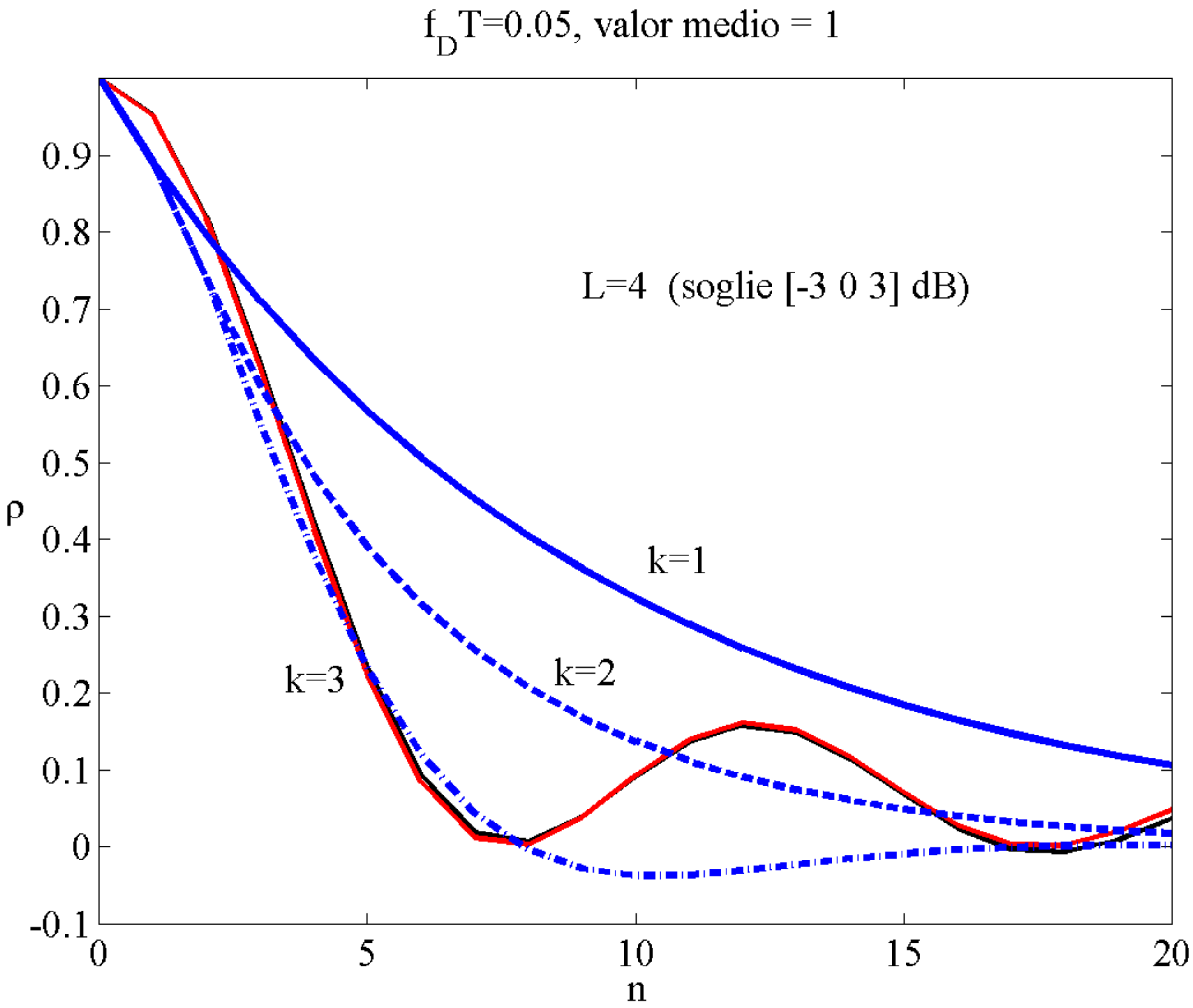


Fading di Rayleigh: Coefficiente di autocorrelazione

Esempio (*Rayleigh*)

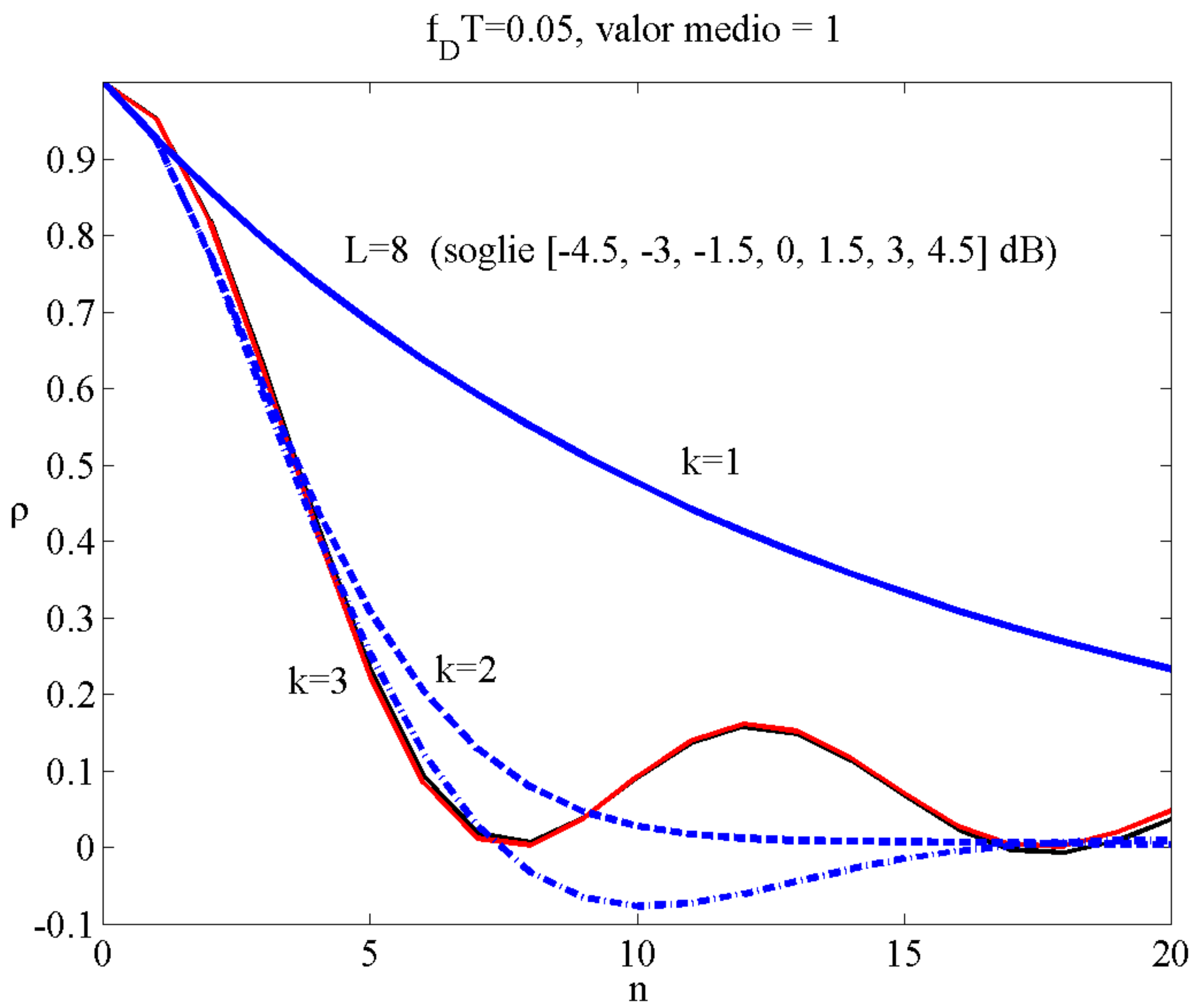


Esempio



$f_D T$=0.05, valor medio = 1
L=4 (soglie [-3 0 3] dB)
k=1
k=2
k=3
ρ
n
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
5
10
15
20

Esempio



$f_D T$=0.05, valor medio = 1
L=8 (soglie [-4.5, -3, -1.5, 0, 1.5, 3, 4.5] dB)
k=1
k=2
k=3
ρ
n
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
5
10
15
20

Riferimenti bibliografici

1. G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. E. N. Gilbert, Capacity of a burst-noise channel, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 1253–1266, Sept. 1960.
3. E. O. Elliott, Estimates of error rates for codes on burst-noise channels, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 42, pp. 1977–1997, Sept. 1963.
4. F. Babich, O. E. Kelly, G. Lombardi, A Context-Tree Based Model for Quantized Fading, *IEEE Communications Letters*, Vol. 3, No. 2, pp. 46-48, February 1999.
5. H. S. Wang and N. Moayeri, Finite-State Markov Channel: A Useful Model for Radio Communication Channel, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 44, no. 1, pp. 163-171, Feb. 1995.
6. F. Babich, G. Lombardi, A Markov Model for the Mobile Propagation Channel, *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 49, no. 1, January 2000.